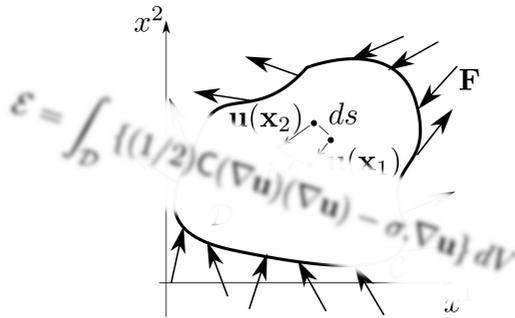


# Théorie d'Elasticité

Une approche variationnelle.

Bahram Houchmandzadeh



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction.</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Le calcul variationnel.</b>	<b>5</b>
2.1	Le minimum nécessaire. . . . .	5
2.2	Convention de sommation. . . . .	8
2.3	Opérations vectorielles. . . . .	9
<b>3</b>	<b>Elasticité à une dimension.</b>	<b>13</b>
3.1	Un problème trivial de statique. . . . .	13
3.2	La Loi de Hook. . . . .	14
<b>4</b>	<b>Elasticité à dimensions <math>&gt;1</math>.</b>	<b>18</b>
4.1	Dérivation de l'équation fondamentale. . . . .	18
4.2	Le tenseur de raideur. . . . .	21
4.3	Les forces de volumes. . . . .	24
4.4	Les conditions de compatibilité. . . . .	24
4.5	Problèmes choisis. . . . .	25
4.6	La méthode des éléments finis. . . . .	26
4.7	Torsion et électromagnétisme. . . . .	26
4.8	Remarques divers. . . . .	30

# 1 Introduction.

La théorie d'élasticité est enseignée comme une extension de la statique, en écrivant une relation d'équilibre entre force  $f_1 = f_2$ .  $f_1$  est une force provoquée par la déformation de la matière et  $f_2$  une force provoquée par l'exertion de force à la surface de l'objet. Les quantités  $f_1$  et  $f_2$  sont des densités de force locale à un point de la matière  $f = f(x)$ . Plus déroutant pour l'étudiant, ces forces sont des tenseurs. Pour les obtenir, il faut par la pensée isoler une partie de la matière et faire le bilan de toutes les forces qui s'exercent sur toutes les faces de cette portion.

Cette façon de faire ressemble pour l'étudiant à l'obtention des équations de Maxwell et les relations entre les champs électrique et magnétique tel que l'on pratique en L2, L3. C'est d'ailleurs comme cela que Maxwell s'était pris pour établir les équations de l'EM, en s'inspirant de l'élasticité ; de nos jours, on continue à utiliser le terme "déplacement électrique", une référence directe aux champs de déplacement dans un matériau élastique déformé.

L'étudiant arrivant en L3-M1 découvre le calcul variationnel, une méthode plus féconde sur le plan théorique et plus puissante sur le plan des calculs, et à l'aide de cet outil, redécouvre la mécanique. Toutes les méthodes confuses du calcul des forces de réaction et des intégrales premières que l'on trouve par des "astuces" sont abandonnées au profit d'une méthode rigoureuse et presque automatique. Toute la dynamique se résume à un seul principe, la recherche de l'extremum d'une fonctionnelle.

La puissance de la méthode variationnelle se déchaîne quand l'étudiant redécouvre les équations de l'électromagnétisme par l'approche variationnelle, et constate avec quelle élégance et quelle économie de moyens on obtient l'ensemble des équations de Maxwell et toutes ses symétries cachées par la coupure artificielle entre champs électrique et magnétique.

Il devient alors étonnant de constater que l'enseignement de l'élasticité reste dans les limbes et que l'on continue à le prodiguer avec les techniques inefficaces *pré-lagrangien*. La raison peut être culturelle,

## 1 Introduction.

la mécanique analytique et la théorie des champs étant des sciences “supérieures” que l’on ne pourrait pas pratiquer sans l’aide des outils élaborés, tandis que l’élasticité est jugé comme une “science de l’ingénieur” qui ne saurait quoi faire du calcul variationnel. Ceci est d’autant plus surprenant que les méthodes numériques telles que les éléments finis sont justement basées sur l’approche variationnelle.

Ce court volume est écrit pour pallier à ce manque de façon pédagogique. Je me contente simplement de dériver les équations fondamentales de l’élasticité en adoptant directement une approche variationnelle. Pour la pratique de la théorie, en dehors des cours de physique théorique de Landau, il existe des centaines d’autres livres.

Pour ce livre, je suppose que le lecteur est un peu familier avec le calcul variationnel et la manipulation des tenseurs, même si je les redéveloppe un peu dans le texte qui suit.

# 2 Le calcul variationnel.

## 2.1 Le minimum nécessaire.

Rappelons brièvement les éléments du calcul variationnel.<sup>1</sup> Nous disposons d'une fonctionnelle pour estimer le "coût" d'une fonction donnée :

$$S[f(t)] = \int_a^b \mathcal{L}[f(t), f'(t), t] dt \quad (2.1)$$

Nous cherchons la fonction  $f(t)$  qui minimise<sup>2</sup> cette fonctionnelle. Le coût local, c'est à dire le terme à l'intérieur de l'intégral est souvent appelé le *lagrangien*. Ce problème est une généralisation du concept de minimum d'une fonction : ici nous avons affaire à une fonction de fonction. Nous pouvons ajouter une petite perturbation  $\epsilon g(t)$  à une fonction donnée, estimer le coût de cette perturbation  $\delta S = S[f + \epsilon g] - S[f]$ . Si le coût additionnel est nul à l'ordre 1 quelque soit la perturbation  $g$ , la fonction  $f$  est un extremum de la fonctionnelle  $S$ . En l'occurrence, avec la forme de la fonctionnelle  $S$  donnée par l'expression (2.1), l'estimation de la variation est simple :

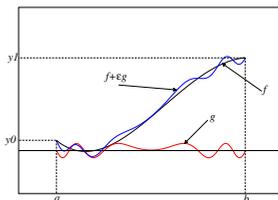


Figure 2.1:

$$\delta S = \epsilon \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} g \right]_a^b + \epsilon \int_a^b \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} \right\} g dt \quad (2.2)$$

L'expression ci-dessus comporte une terme de bord  $\left[ \right]_a^b$  et un terme intégrale  $\int_a^b$ . L'annulation du terme intégral, quelque soit  $g$  nous impose

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = 0 \quad (2.3)$$

1. Le lecteur intéressé pourra se reporter à mon cours de mathématiques pour une vue plus approfondie de cette matière : <http://houchmandzadeh.net/cours/Math/math.htm>

2. qui "extremise" pour être exacte, peu importe que ce soit un maximum ou un minimum.

## 2 Le calcul variationnel.

qui est en générale une équation différentielle de second ordre (appelée l'équation d'Euler-Lagrange). Si nous exigeons

$$f(a) = y_a \ ; \ f(b) = y_b \tag{2.4}$$

c'est à dire les deux bords de la fonction fixée, nous ne pouvons pas envisager toutes les perturbations possibles, mais seulement celles compatibles avec l'exigence ci-dessus. Cela restreint le champ des perturbations aux fonctions telle que  $g(a) = g(b) = 0$ . L'équation (2.3) avec les deux conditions (2.4) est bien posée et admet une solution unique. Nous aurions pu ne pas fixer un bord ou même laisser libre les deux bords ; dans ce cas, la condition  $\delta S = 0$  exigerait  $\partial \mathcal{L} / \partial f' = 0$  sur les bords libres, ce qui à nouveau fournirait suffisamment de conditions pour que l'équation différentielle soit soluble.

**Exemple 0.** En mécanique analytique, pour une particule à une dimension repérée par  $x(t)$  se trouvant dans un potentiel  $V(x)$ , le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = (m/2)x'^2 - V(x)$$

l'équation d'E-L s'écrit alors  $mx'' = -V'(x)$ , qui est bien sûr la loi de Newton  $F = ma$ .

**Généralisation 1.** Nous pouvons avoir plus qu'une fonction dans le lagrangien :  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(f'_1, f_1, f'_2, f_2, \dots, f'_n, f_n, t)$ . Dans ce cas, nous obtenons  $n$  équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

**Exemple 1.** Pour une particule à 3 dimensions repérée par  $(x(t), y(t), z(t))$  se trouvant dans un potentiel  $V(x, y, z)$ , le lagrangien s'écrit  $\mathcal{L} = (m/2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - V(x, y, z)$  et donc

$$\begin{aligned} mx'' &= -\partial V / \partial x = F_x \\ my'' &= -\partial V / \partial y = F_y \\ mz'' &= -\partial V / \partial z = F_z \end{aligned}$$

**Généralisation 2.** Nous pouvons avoir dans le lagrangien une fonction de plusieurs variables  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Pour alléger les notations, nous posons  $f_{,i} = \partial f / \partial x_i$ . Nous obtenons 1 équation d'Euler-Lagrange :

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{,i}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = 0$$

**Exemple 2.** Pour une corde élastique accrochée entre deux points, la hauteur de la corde à la position  $x$  à l'instant  $t$  est repérée par la fonction  $u(x, t)$ . Le lagrangien de la corde s'écrit

$$\mathcal{L} = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - k \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

Le premier terme est l'énergie cinétique d'un point de la corde, le deuxième terme l'énergie élastique de ce même point. L'équation d'Euler-Lagrange est :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

qui est l'équation de la corde vibrante.

**Généralisation 3 et fin.** Le lagrangien peut comporter  $m$  fonctions de  $n$  variables  $u_i(x_j)$  et toutes les dérivées partielles associées. Dans ce cas, nous aurons  $m$  équations, chacune comportant une sommation sur  $n$  termes. Comme les indices deviennent un peu encombrant, il est judicieux d'utiliser également les exposants pour énumérer nos objets. Nous repérerons les fonctions par  $u^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), les variables par  $x^j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) et noterons  $u^i_{,j} = \partial u^i / \partial x^j$ . Nous avons alors les  $m$  équations (une équation par fonction)

$$\left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i_{,j}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i} = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.5)$$

**Exemple 3.** Une particule en mécanique quantique est repérée par la fonction d'onde  $\psi(x, t)$ . Cette fonction est cependant complexe et nous avons donc en réalité deux fonctions (réelles). Le lagrangien de la mécanique quantique s'écrit :

$$\mathcal{L} = (i/2)(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) - a(\partial_x \psi^*)(\partial_x \psi) - V(x)\psi^* \psi$$

## 2 Le calcul variationnel.

Commençons par la composante  $\psi^*$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,t}^*} &= \frac{\partial}{\partial t} (-i\psi/2) = -(i/2)\partial_t \psi \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,x}^*} &= \frac{\partial}{\partial x} (-a\partial_x \psi) = -a\partial_{xx} \psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} &= (i/2)\partial_t \psi - V(x)\psi\end{aligned}$$

En sommant les deux premières lignes avec le signe + et la troisième ligne avec le signe -, nous trouvons

$$-i\partial_t \psi - a\partial_{xx} \psi + V(x)\psi = 0$$

qui est bien sûr l'équation de Schrodinger (à quelques  $\hbar$  près). Le lecteur pourra vérifier que traiter la composante  $\psi$  donnera une équation analogue en  $\psi^*$ .

## 2.2 Convention de sommation.

Regardons un peu plus en détail l'expression (2.5). Nous voyons que la somme est effectuée sur l'indice  $j$ , qui apparaît deux fois : une fois dans le terme  $\partial/\partial x^j$  et une fois dans le terme  $\partial \mathcal{L}/\partial u_{,j}^i$ . Au fur et à mesure que le calcul tensoriel s'est développé<sup>3</sup>, les gens se sont rendu compte que pratiquement à chaque fois qu'ils devaient effectuer une sommation, l'indice était répété. Les scientifiques ont donc laissé tomber le signe somme, avec la convention suivante :

Quand un indice est répété dans un produit, cela sous-entend une sommation sur cet indice<sup>4</sup>.

---

3. Ricci et Levi-Civita ont publié le premier article en 1901 ; pour développer la théorie de la gravitation, Einstein s'est énormément servi de ces calculs et c'est probablement le premier à avoir établi cette convention de sommation, qui est souvent connu sous le nom de convention d'Einstein.

4. Encore plus précisément, la sommation est effectuée seulement si l'indice répété apparaît une fois en haut une fois en bas. Nous pouvons voir cela comme une règle grammaticale, comme pour les parenthèses ouvertes qui doivent compenser les parenthèses fermées. Ceci dit, cette convention est plus profonde et fait référence au caractère de vecteur ou de forme linéaire des objets considérés. Nous ne rentrons pas dans ces détails ici, puisque nous nous contenterons d'utiliser les coordonnées cartésiennes où la correspondance entre forme et vecteur est triviale.

## 2 Le calcul variationnel.

Par exemple, les éléments d'une matrice sont désignés par  $a_{ij}$ . Par contre,  $a_{ii}$  désigne la trace de la matrice  $a_{ii} = \sum_i a_{ii}$ . Soit un vecteur  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)$  défini dans un espace à  $n$  dimension. L'expression  $\partial u^i / \partial x^j$  représente la dérivée partielle de la composante  $u^j$  le long de la direction  $x^j$ . Par contre, la quantité  $\partial u^i / \partial x^i$  représente la divergence du vecteur :

$$\partial_i u^i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial x^i} = \text{div} \mathbf{u}$$

le produit d'une matrice par un vecteur s'écrit  $y_i = a_{ij} x_j$ , le produit scalaire entre deux vecteurs s'écrit<sup>5</sup>  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^i y^i$ . Cette convention rend l'écriture très fluide et lisible quand la gestion des indices devient une tâche ingrate mais importante. Avec cette convention, l'équation (2.5) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i_{,j}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i} = 0$$

L'indice muet  $i$  n'étant pas répété, il représente une composante arbitraire et nous avons bien  $m$  équations.

### 2.3 Opérations vectorielles.

Les conventions de sommations nous allègent pas mal l'écriture. Ceci dit, manipuler tout ces indices devient compliqué à la longue et on peut se demander si une partie de la beauté des expressions n'est pas caché par la profusion d'indices et d'exposants. Autant l'écriture des équation d'Euler-Lagrange pour une fonction à une variable est simple, autant la gestion des indices peut paraître décourageant.

Le concept de vecteur a commencé à occuper le devant de la scène à partir du milieu du XIXème siècle. Les physiciens avaient l'habitude d'écrire une équation pour chaque *composante* d'un vecteur (par exemple celui du champs électromagnétique). Au fur et à mesure, il est devenu claire qu'il est plus simple d'utiliser des équations vectorielles

---

5. Comme vous le remarquez, l'écriture du produit scalaire ne respecte pas la règle d'indice répété haut et bas. Nous aurions dû écrire  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij} x^i y^j$  où  $g_{ij}$  est appelé le tenseur métrique et dépend de notre système de coordonnées. Comme nous travaillons souvent en coordonnées cartésiennes dans un espace euclidien,  $g_{ij} = \delta_{ij}$  et notre "manquement" n'est pas vraiment grave. Mais pour être tout a fait au norme, nous aurions pu poser  $x_j = g_{ij} x^i$  et écrire le produit scalaire comme  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_j y^j$ . Ceci est beaucoup plus qu'un exercice futile de grammairien intégriste, mais l'histoire serait longue à raconter.

## 2 Le calcul variationnel.

comme par exemple

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$$

Non seulement cela économise le nombre d'équations à écrire, mais en plus nous avons une vision plus claire et profonde de la signification des équations.

La plupart des étudiants sont habitués aux opérateurs différentiels vectoriels comme le “gradient” et la “divergence”. Il se trouve que tout ces opérateurs se généralisent naturellement aux objets plus complexes. Par exemple, le gradient d'une fonction scalaire est une fonction vectorielle ; le gradient d'une fonction vectorielle est une fonction matricielle (tensorielle).

Voyons cela de plus près. Soit une fonction scalaire  $f(\mathbf{x})$  définie sur un espace à  $n$  dimension :  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ . De combien varie  $f$  si l'on se déplace de  $d\mathbf{x}$ ? La réponse est évidemment

$$df = (\nabla f) \cdot d\mathbf{x}$$

$\nabla f$  et  $d\mathbf{x}$  sont tout deux des vecteur, leur produit scalaire produit justement un scalaire qui est  $df$ . En coordonnées cartésiennes, les composantes du gradient sont simplement définies par  $(\nabla f)_i = f_{,i} = \partial f / \partial x^i$  et notre convention de sommation nous permet d'écrire  $df$  à l'aide des composantes  $df = (\nabla f)_i \cdot dx^i$ .

Prenons maintenant une fonction vectorielle  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ . De combien varie  $\mathbf{u}$  si l'on se déplace de  $d\mathbf{x}$ ? L'opérateur gradient est fait pour cela :

$$d\mathbf{u} = (\nabla\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{x}$$

cette fois,  $d\mathbf{u}$  et  $d\mathbf{x}$  sont des vecteurs,  $(\nabla\mathbf{u})$  est donc une matrice (un tenseur d'ordre deux). En coordonnées cartésiennes, les composantes du gradient sont définies par  $(\nabla\mathbf{u})_j^i = u^i_{,j} = \partial u^i / \partial x^j$ . Notre convention de sommation nous permet d'écrire  $d\mathbf{u}$  à l'aide des composantes :  $du^i = u^i_{,j} dx^j$ . Mais avouez que l'écriture tensorielle est quand même plus élégante.

Il se trouve que la plupart des lois physiques sont formulées à l'aide de vecteurs. Les lagrangiens associés doivent donc également être formulés à l'aide des vecteurs. De plus, le lagrangien est une quantité scalaire, ce qui limite les possibilités de sa formulation. Prenons le cas le plus fréquent en physique d'une fonction  $f(\mathbf{x})$  définie sur un espace à  $n$  dimensions. Un lagrangien typique est de la forme

$$S = \int_V \left\{ (1/2)(\nabla f)\mathbf{C}(\nabla f)^T + (\nabla f)\mathbf{A} + Bf \right\} dV$$

## 2 Le calcul variationnel.

où  $B$ ,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{C}$  sont des fonctions scalaire, vectorielle et tensorielle respectivement et  $(\nabla f)^T$  désigne la transposée de  $(\nabla f)$ . Nous supposons sans perte de généralité  $\mathbf{C}$  symétrique. Si nous étions à une dimension, le lagrangien équivalent s'écrirait  $\mathcal{L} = (1/2)Cf'^2 + Af' + Bf$ . Ajoutons la perturbation  $g$  à la fonction  $f$  et évaluons le coût additionnel engendré :

$$\delta S = \int_V \left\{ (1/2)(\nabla g)\mathbf{C}(\nabla f)^T + (1/2)(\nabla f)\mathbf{C}(\nabla g)^T + (\nabla g)\mathbf{A} + Bg \right\} dV$$

Comme  $\mathbf{C}$  est symétrique et que  $(\nabla g)\mathbf{C}(\nabla f)^T$  est un scalaire<sup>6</sup>, nous avons  $(\nabla g)\mathbf{C}(\nabla f)^T = (\nabla f)\mathbf{C}(\nabla g)^T$ .

Nous devons maintenant effectuer l'équivalent de l'intégration par partie : pour une fonction scalaire  $h$  et un vecteur  $\mathbf{v}$ , nous avons

$$\int_V (\nabla h) \cdot \mathbf{v} dV = \int_{\partial V} h \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} - \int_V h (\mathbf{div} \cdot \mathbf{v}) dV$$

où  $\partial V$  désigne la surface qui délimite  $V$  et  $d\mathbf{S}$  est l'élément de surface normale et infinitésimale. Ceci est un théorème très général ; l'intégration par partie que nous connaissons est le cas particulier d'application de ce théorème aux fonctions unidimensionnelles. Avec tout ces résultats en main, nous pouvons écrire

$$\delta S = \int_{\partial V} g (\mathbf{C}(\nabla f)^T + \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \int_V \{ B - \mathbf{div} (\mathbf{C}(\nabla f)^T + \mathbf{A}) \} g dV$$

Pour que  $\delta S$  soit nulle à l'ordre 1 quelque soit  $g$ , nous obtenons l'équation d'Euler-Lagrange générale

$$B - \mathbf{div} (\mathbf{C}(\nabla f)^T + \mathbf{A}) = 0 \tag{2.6}$$

et les conditions aux limites sont fournies par les termes de bords

$$\int_{\partial V} g (\mathbf{C}(\nabla f)^T + \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

Par exemple, dans le cas le plus simple où  $\mathbf{C}$  est diagonal et  $\mathbf{A}$  constant<sup>7</sup>, l'équation (2.6) se transforme en

$$\Delta f = B$$

---

6. Le transposé d'un scalaire est un scalaire

7. Le laplacien  $\Delta$  est définie par la divergence d'un gradient.

## 2 *Le calcul variationnel.*

qui n'est rien d'autre que l'équation de Laplace en électrostatique si  $f$  représente le potentiel et  $B$  la densité de charge.

Résumons : l'utilisation vectoriel des lagrangiens nous évite la tâche fastidieuse de manipulation des indices à profusion et fait ressembler très fortement les manipulations au cas unidimensionnel. Un très grand avantage que nous ne développerons pas ici est que cette formulation est indépendante du système de coordonnées que l'on utilise et permet très simplement de passer des coordonnées cartésiennes au sphériques.

# 3 Elasticité à une dimension.

## 3.1 Un problème trivial de statique.

Les concepts importants de l'élasticité apparaissent dès que l'on traite d'un solide à une dimension ; la généralisation à plusieurs dimensions devient ensuite juste une histoire de gestion d'indice.

Commençons par quelque chose de encore plus triviale : une particule se trouvant dans un potentiel  $V(x)$  est soumise à une force extérieure constante  $F$  (figure 3.1). Quelle est sa position d'équilibre ? Nous avons plusieurs façon d'aborder ce problème. On peut d'abord écrire l'équilibre des forces : à la position  $x^*$ , la particule subit la force  $f_1 = -V'(x^*)$  due au potentiel et la force  $f_2 = F$  due à la force externe. Nous devons donc avoir  $f_1 + f_2 = 0$  et devons résoudre l'équation  $V'(x^*) = F$ .

Nous pouvons également nous dire que cette façon de séparer les forces est arbitraire. La force constante dérive d'un potentiel linéaire  $-Fx$  et donc la particule se trouve dans un potentiel effectif<sup>1</sup>  $\bar{V}(x) = V(x) - Fx$ . Il suffit de chercher le minimum de  $\bar{V}(x)$  pour trouver l'équilibre par la relation  $\bar{V}'(x^*) = 0$ .

---

1. Une autre façon de dire la même chose est de constater que le travail fourni par la force  $F$  se déplaçant de  $x$  est  $W = Fx$ . Le potentiel effectif est donc  $\bar{V} = V(x) - W$

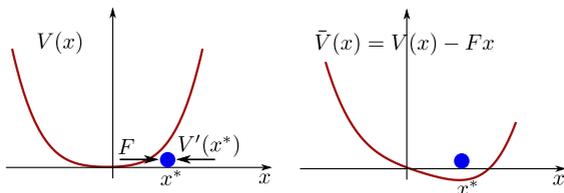


FIGURE 3.1: Déplacement sous l'action d'une force extérieure d'une particule se trouvant dans un potentiel. Le point d'équilibre est trouvé soit en écrivant l'équilibre des forces, soit en cherchant le minimum du potentiel effectif.

Ces deux méthodes bien sûr reviennent strictement au même dans ce problème simple. Quand nous sommes à plusieurs dimensions cependant, il est beaucoup plus facile de manier une quantité scalaire  $V$  qu'une quantité vectorielle  $\mathbf{F}$ . Un solide déformable est constitué d'une "infinité" de point matérielle et la distinction entre les deux méthodes devient encore plus criante.

## 3.2 La Loi de Hook.

Hook est un grand scientifique caché par l'ombre de son collègue Newton. Parmi ses nombreux travaux, il a découvert la loi des ressorts : prenez une poutre et soumettez le à une force le long de son axe. Le déplacement à l'extrémité est proportionnel à la force appliqué. Mais quelle est l'origine microscopique de cette loi ? Repérons les points matériels par leur abscisse  $x$  avant déformation. Sous l'action des forces, un point  $P$  se déplace de coordonnée  $x$  au coordonnée  $x'$ . Nous appellerons  $u'(x) = x' - x$  le *déplacement*. Il est évident que si nous connais-

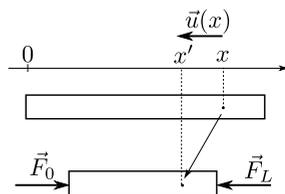


Figure 3.2:

sons la fonction  $u(x)$ , nous savons exactement comment le solide s'est déformé. Quelle doit être l'énergie élastique  $\mathcal{E}_p$  stockée dans la poutre ? Premièrement nous voyons que si  $u(x) = Cte$ , la barre s'est simplement déplacé dans son ensemble et il n'y a pas d'énergie élastique en jeu :  $\mathcal{E}_p$  ne doit donc pas dépendre de la valeur de  $u$ . Par contre, si deux points matériels s'approchent ou s'éloignent, nous aurons une énergie associée :  $\mathcal{E}_p$  doit donc dépendre des dérivées de  $u$ . Enfin, pour les petites déformations, les rapprochements ou éloignement de deux points matérielles doivent induire la même énergie. La forme la plus simple que l'on puisse écrire pour l'énergie élastique compatible avec les exigences ci-dessus est donc

$$\mathcal{E}_p = \int_0^L (1/2)ku'^2 dx$$

où  $k$  est une constante de raideur dépendant des propriétés du matériaux et le facteur  $1/2$  joue un rôle esthétique. La quantité  $u'(x)$  porte le nom de *déformation*. Nous n'avons pas encore fini, il nous faut prendre en compte les forces extérieures  $F_1$  et  $F_2$  dans l'énergie. D'après ce que nous avons dit ci-dessus, l'énergie potentielle effective de la poutre

### 3 Elasticité à une dimension.

s'écrit

$$\mathcal{E} = \int_0^L (1/2)ku^2 dx - F_0u(0) - F_Lu(L)$$

Si nous voulons déployer l'artillerie du calcul variationnel, nous devons importer les termes de bords dans l'intégrale. Inventons une fonction  $f(x)$  continue que nous appellerons *contrainte* et écrivons

$$F(L)u(L) + F_0u(0) = \int_0^L (fu)' dx$$

Le terme dans l'intégrale étant un différentiel exact, nous voyons que nous devons avoir <sup>2</sup>  $f(L) = F_L$  et  $f(0) = -F_0$ . La condition d'équilibre du solide nous impose de plus que  $F_0 + F_L = 0$ , ce qui revient à

$$\int_0^L f'(x) dx = 0$$

La façon la plus simple d'inventer la fonction  $f(x)$  est de la prendre égale à une constante <sup>3</sup> :

$$f(x) = F_L$$

Et l'énergie totale s'écrit enfin

$$\mathcal{E} = \int_0^L \{(1/2)ku'^2 - F_Lu'\} dx$$

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit

$$\frac{d}{dx} [ku' - F_L] = 0$$

c'est à dire  $ku' - F_L = Cte$ . Pour déterminer la constante, nous avons besoins de conditions aux limites. Nous n'avons pas imposé de conditions a priori sur  $u(L)$  et  $u(0)$  et donc, d'après notre discussion de l'équation (2.2), nous devons avoir

$$\left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u'} \right|_{x=0,L} = 0$$

---

2. Remarquons pour plus tard que la normale vers l'extérieur aux extrémité change de signe. Nous aurions pu poser  $F_a = f(a)n_a$  où  $a$  désigne l'extrémité choisi et  $n_a$  le signe de la normale à cette extrémité.

3. Nous aurions pu, sans conséquence sur les résultats physiques, choisir une fonction non-constante : le Lagrangien n'est définie qu'à une dérivée totale près. Voir ci-dessous.

### 3 Élasticité à une dimension.

La constante en question est donc nulle et nous aboutissons alors à l'équation fondamentale de l'élasticité

$$ku' = f$$

C'est à dire : déformation  $\times$  constante élastique = contrainte. Résumons : nous connaissons la contrainte et la constante élastique, nous pouvons donc intégrer l'équation différentielle ci-dessus et retrouver le champ de déplacement. L'élasticité à une dimension comporte la simplicité d'avoir un champ de déformation constante, mais cela ne sera plus le cas quand on passe aux dimensions supérieures.

**L'arbitraire de la contrainte ( la jauge).** Nous avons “inventé” une fonction contrainte pour pouvoir transformer un terme de “frontière” ( $F_L u_L - F_0 u_0$ ) en terme intégrale ( $\int_a^b (fu)' dx$ ). L'intégrand s'écrit  $f'u + fu'$  et nous avons dit que le Lagrangien le plus simple, qui ne contient que des termes en  $u'$ , s'obtient si on choisit  $f'(x) = 0$ . La seule chose mesurable que l'on connaisse de la fonction  $f(x)$  sont ses conditions aux frontières. Prenons donc une fonction  $f(x)$  compatible quelconque et réécrivons l'énergie :

$$\mathcal{E} = \int_0^L \{ (1/2)ku'^2 - fu' - f'u \} dx$$

l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit

$$\frac{d}{dx} [ku' - f] + f' = 0$$

ou encore  $ku'' = 0$ . Les condition aux bord sont

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u'} \right]_{x=0,L} = [ku' - f]_{x=0,L} = 0$$

Ce qui revient comme avant à avoir  $u'(L) = f(L)/K = F_L/K = u'(0)$ . Nous avons donc exactement la même solution pour le déplacement qu'auparavant, quand nous avons choisi  $f'(x) = 0$ . La seule quantité mesurable est le déplacement et l'arbitraire dans la contrainte ne doit pas modifier cette quantité, sinon notre théorie est à jeter. Le lecteur a déjà rencontré un problème analogue dans le choix de la jauge en électromagnétisme.

Les mécaniciens ont une interprétation “physique” de la fonction  $f$ , en le présentant comme la force qu'une partie infinitésimal du milieu

### 3 *Elasticité à une dimension.*

applique à son voisin. Cette interprétation n'est valide qu'avec la jauge  $f'(x) = 0$ , ou sa version plus compliqué à trois dimensions qui s'écrit comme la nullité d'une certaine divergence.

# 4 Elasticité à dimensions $>1$ .

## 4.1 Dérivation de l'équation fondamentale.

Nous allons suivre exactement le même chemin qu'au chapitre précédent, sauf qu'en étudiant un solide à deux ou trois dimensions, nos opérations mathématiques deviennent un peu plus encombrant. Considérons un solide occupant un volume  $\mathcal{D}$  dont la surface est délimitée par  $\mathcal{C}$ . Nous repérons les points du solide avant déformation par la coordonnées  $\mathbf{x} = (x^1, x^2)$ . Sous l'action des forces exercées à sa surface, les points se déplacent et nous appellerons vecteur déplacement la différence entre les nouvelles et anciennes coordonnées  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ .

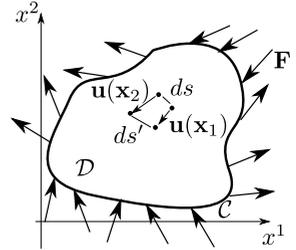


Figure 4.1:

L'énergie élastique stockée dans le matériaux doit dépendre du rapprochement ou de l'éloignement des points. Le rapprochement entre deux points  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  suite à l'exertion des forces est donc  $d\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})$ . En développant à l'ordre 1, nous trouvons les composantes de ce vecteur <sup>1</sup>

$$du^i = u^i_{,j} dx^j$$

que nous aurions pu écrire sous forme matricielle  $d\mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}$  où les éléments de la matrice  $\nabla \mathbf{u}$ , les déformations, sont donnés par  $(\nabla \mathbf{u})^i_j = u^i_{,j}$ . Comme nous sommes des gens sérieux, à la place du mot matrice, nous utiliserons le mot *tenseur de rang 2*, ou simplement *tenseur* si il n'y a pas d'ambiguïté sur le rang (le nombre d'indice pour énumérer nos objets). Notons que le tenseur  $\nabla \mathbf{u}$  n'est rien d'autre que le gradient du vecteur  $\mathbf{u}$ . L'opérateur gradient transforme un scalaire en vecteur, un vecteur en tenseur de rang 2 et ainsi de suite. Comme précédemment, l'énergie élastique doit dépendre des déformations  $u^i_{,j}$  de façon quadratique. De façon la plus générale possible, on peut écrire l'énergie

---

1. Rappelons que nous notons  $u^i_{,j} = \partial u^i / \partial x^j$ .

#### 4 Elasticité à dimensions $>1$ .

élastique comme

$$\mathcal{E}_p = \int_{\mathcal{D}} (1/2) C_{ik}^{jl} u_{,j}^i u_{,l}^k dV \quad (4.1)$$

où la constante de raideur  $C_{ik}^{jl}$ , un tenseur de rang 4, remplace le scalaire  $k$  dans le cas unidimensionnel. Nous aurions pu écrire l'intégral sous forme tensoriel directement comme<sup>2</sup>

$$(\nabla \mathbf{u}) \cdot [\mathbf{C} (\nabla \mathbf{u})] \quad (4.2)$$

Le nombre imposant d'indice dans la constante de raideur ne doit pas intimider le lecteur, nous verrons que pour un matériau isotrope, le tenseur  $\mathbf{C}$  ne contient en faite que deux nombres indépendants<sup>3</sup>.

Nous devons également inclure le travail des forces de surface

$$W = \int_c \mathbf{F} \mathbf{u} ds \quad (4.3)$$

Comme précédemment, pour avoir une belle formulation variationnelle, nous devons transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume. Nous connaissons justement le théorème de divergence qui nous permet de transformer le flux d'un vecteur  $\mathbf{a}$  à travers une surface en intégrale de sa divergence dans le volume :

$$\int_c (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_{\mathcal{D}} (\mathbf{div} \mathbf{a}) dV$$

où  $\mathbf{n}$  dans l'expression ci-dessus désigne le vecteur unitaire normale à la surface. Malheureusement, l'expression (4.3) n'a pas la forme d'un flux et nous ne pouvons pas la transformer en intégrale de volume tel quel. Par contre, nous pouvons écrire les forces de surface comme

$$\mathbf{F} = \sigma \mathbf{n} \quad (4.4)$$

où  $\sigma$  est un tenseur de rang 2, que nous appellerons *contrainte*. Encore mieux, nous pouvons prolonger arbitrairement ce tenseur dans le volume  $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$ , en exigeant simplement qu'à la surface, il obéisse à la

---

2. L'écriture de la formule est l'égerment ambiguë pour ne pas alourdir les notations : nous entendons bien le produit scalaire entre le tenseur de deuxième rang  $\mathbf{C} (\nabla \mathbf{u})$  et le tenseur  $(\nabla \mathbf{u})$ . Cela est l'équivalent d'un produit bilinéaire entre vecteur.

3. De plus, ceci n'est pas la façon standard d'écrire l'énergie élastique et il est habituel d'utiliser une forme plus symétrique. Nous y reviendrons dans quelques paragraphe.

#### 4 Elasticité à dimensions $>1$ .

relation (4.4). Comme avant, nous choisirons la forme la plus simple pour les contraintes dans le volume. Le travail s'écrit maintenant

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathcal{C}} \sigma \mathbf{u} \mathbf{n} ds \\ &= \int_V \mathbf{div}(\sigma \mathbf{u}) dV \end{aligned}$$

Nous pouvons quelques peu simplifier l'expression ci-dessus, en étudiant la signification de la divergence :

$$\begin{aligned} \mathbf{div}(\sigma \mathbf{u}) &= \frac{\partial}{\partial x^i} (\sigma_j^i u^j) \\ &= \left( \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x^i} \right) u^j + \sigma_j^i u_{,i}^j \end{aligned}$$

Les expressions ci-dessus généralisent les opérations courantes que nous connaissons sur les vecteurs. Par exemple, l'opération divergence transforme un vecteur en scalaire, et un tenseur de rang 2 en vecteur. Le premier terme entre parenthèse est donc la divergence du tenseur des contraintes. Le deuxième terme représente le produit entre le tenseur des contraintes et le tenseur déformation :

$$\mathbf{div}(\sigma \mathbf{u}) = (\mathbf{div} \sigma) \cdot \mathbf{u} + \sigma \cdot \nabla \mathbf{u}$$

Dans le cas unidimensionnel, nous avons choisi  $f(x)$ , la prolongation (arbitraire) des forces de surface dans le volume en posant  $f'(x) = 0$ . Cela nous simplifiait la tâche en ne laissant dans le lagrangien que des termes en  $u'(x)$ . Nous agissons exactement de même ici, en exigeant

$$\mathbf{div} \sigma = 0 \tag{4.5}$$

où, en utilisant directement les éléments,

$$\partial_j \sigma_i^j = 0$$

L'équation ci-dessus est une équation (en faite  $d$  équations scalaires, où  $d$  est la dimension) à dérivée partielle de premier ordre avec les conditions aux bords (4.4). C'est une équation sous déterminée et nous pouvons imposer encore plus de conditions sur  $\sigma$ . Par exemple, nous exigerons que  $\sigma$  soit symétrique :  $\sigma_j^i = \sigma_i^j$ <sup>4</sup>.

---

4. Voir la discussion sur les conditions de compatibilité plus bas.

## 4 Elasticité à dimensions $>1$ .

Enfin, en regroupant tout nos résultats, nous pouvons écrire l'expression de l'énergie totale de notre système :

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{D}} \{(1/2)\mathbf{C}(\nabla\mathbf{u})(\nabla\mathbf{u}) - \sigma \cdot \nabla\mathbf{u}\} dV$$

Les tenseurs  $\mathbf{C}$  et  $\sigma$  étant connu, le lagrangien est bien posée. Nous pouvons déduire les équations d'Euler-Lagrange indice par indice, mais nous pouvons également effectuer ces opérations directement de façon vectoriel et obtenir comme au section 2.3 :

$$\mathbf{C}(\nabla\mathbf{u}) - \sigma = 0 \tag{4.6}$$

et comme précédemment, le faite que le membre de droite de cette équation soit nulle vient directement de nos conditions aux bords libre. L'expression ci-dessus est l'équation fondamentale de l'élasticité.

Cette équation est énoncée sous forme savante, mais ce n'est rien d'autre que la loi de Hook : déformation (le tenseur  $\nabla\mathbf{u}$ ) multiplié par une constante de raideur (le tenseur de raideur  $\mathbf{C}$ ) égale la contrainte (le tenseur  $\sigma$ ).

### 4.2 Le tenseur de raideur.

Le tenseur de raideur cache des symétries qui réduisent fortement le nombre de ses éléments, à deux dans le cas des matériaux isotropes.

**Permutation.** Prenons une expression quadratique simple, par exemple  $I = x^1x^1 + 2x^1x^2 + 3x^2x^2$ . Nous pouvons réécrire cette expression comme  $I = x^1x^1 + 5x^1x^2 - 3x^2x^1 + 3x^2x^2$  ou encore  $I = x^1x^1 + x^1x^2 + x^2x^1 + 3x^2x^2$  ou un milliard d'autres façon. Sous forme tensorielle, nous avons  $I = A_{ij}x^ix^j$ . Les éléments diagonaux sont définis sans ambiguïté par  $A_{11} = 1$  et  $A_{22} = 3$ . Par contre, pour les éléments non diagonaux, nous avons le choix. N'étant pas masochiste, nous choisirons toujours les éléments non-diagonaux pour que le tenseur soit symétrique.

Regardons maintenant de plus près le tenseur  $\mathbf{C}$ , qui apparaît dans une forme quadratique

$$\mathbf{C}_{ik}^{jl} u_{,j}^i u_{,l}^k$$

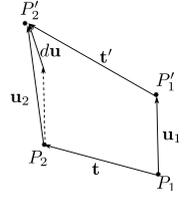
Comme nous pouvons commuter  $u_{,j}^i$  et  $u_{,l}^k$  dans le produit, nous choisissons  $\mathbf{C}$  symétrique par rapport à cette permutation :

$$\mathbf{C}_{ik}^{jl} = \mathbf{C}_{ki}^{lj}$$

#### 4 Elasticité à dimensions $>1$ .

**Elongation.** Considérons deux points  $P_1$  et  $P_2$  infinitésimement proche avant la déformation, qui se transforment en points  $P'_1$  et  $P'_2$  ensuite. Soit  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{t}'$  les vecteurs qui les relient avant et après déformation. Par définition du vecteur déplacement, nous avons

$$\mathbf{t}' = \mathbf{t} + d\mathbf{u} = \mathbf{t} + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{t}$$



L'énergie élastique est associée uniquement au changement de *distance* entre les deux points :

$$\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t}' - \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 2\mathbf{t} \cdot (\nabla\mathbf{u})\mathbf{t} + [(\nabla\mathbf{u})\mathbf{t}] \cdot [(\nabla\mathbf{u})\mathbf{t}] \approx 2\mathbf{t} \cdot (\nabla\mathbf{u})\mathbf{t}$$

ou encore, en prenant des racines carrés,

$$dl' \approx dl + \mathbf{t} \cdot (\nabla\mathbf{u})\mathbf{t}$$

en élasticité classique, les déformations sont très faible<sup>5</sup> et c'est pourquoi nous pouvons négliger le terme de second ordre en  $(\nabla\mathbf{u})$ . Ceci dit, un produit scalaire du genre  $\mathbf{t} \cdot (\nabla\mathbf{u})\mathbf{t}$  ne contient les coefficients de  $(\nabla\mathbf{u})$  que de façon symétrique : nous n'avons dans ce produit que des termes du genre

$$\epsilon_j^i = \frac{1}{2} (u_{,j}^i + u_{,i}^j)$$

ou sous forme tensoriel,  $dl' = dl + \mathbf{t} \cdot \epsilon \cdot \mathbf{t}$ . Nous avons ajouté le facteur  $1/2$  par commodité. Le tenseur symétrique  $\epsilon = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$  est en réalité ce que nous appelons le tenseur de déformation. Si nous considérons que l'énergie élastique d'un matériaux élastique ne doit dépendre que des *changements de longueur* entre les points voisins<sup>6</sup>, alors l'expression de l'énergie élastique stockée ne doit contenir que des termes en  $\epsilon$ . Comme par ailleurs  $\sigma$  est symétrique,  $\sigma \cdot \nabla\mathbf{u} = \sigma \cdot \nabla\mathbf{u}^T = \sigma \cdot \epsilon$  et donc

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{D}} \{ (1/2) (\mathbf{C}\epsilon) \cdot \epsilon - \sigma \cdot \epsilon \} dV$$

5. des déformations de l'Ordre de  $10^{-2}$  sont à la limite d'élasticité de la plupart des matériaux comme les métaux ; cette limite est encore plus faible pour des matériaux de type béton. Par contre, certains matériaux à base de polymère peuvent de loin dépasser ces déformations.

6. Nous pouvons décomposer un tenseur en somme de ses parties symétrique et antisymétrique  $\nabla\mathbf{u} = (1/2)(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) + (1/2)(\nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}^T)$ . La partie symétrique est ce que nous appelons la déformation. La partie antisymétrique  $\omega$  correspond à une rotation solide. Une translation uniforme ne stocke pas de l'énergie élastique ; une rotation solide est exactement pareil. Notons également que  $\omega = \mathbf{curl}\mathbf{u}$ . Nous reviendrons plus en détail là-dessus quand nous traiterons les dislocations.

Cela ne change rien à la dérivation variationnelle de l'équation fondamentale, qui s'écrit<sup>7</sup>

$$C\epsilon = \sigma \tag{4.7}$$

**Compression et cisaillement.** On appelle compression quand le vecteur déplacement de deux points voisins est parallèle à leurs vecteurs, et cisaillement quand elle est perpendiculaire. Pour un matériaux isotrope, l'énergie associée à une compression ne doit pas dépendre de la direction de cette compression<sup>8</sup>; la même chose vaut pour un cisaillement. Par contre, l'énergie associée à un cisaillement ou à une compression peuvent être différentes. L'expression de la densité l'énergie élastique est donc obligatoirement

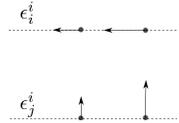


FIGURE 4.3:

$$d\mathcal{E} = \left( \frac{\lambda}{2} Tr(\epsilon)^2 + \mu \epsilon \cdot \epsilon \right) dV$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont appelé les coefficients de Lamé<sup>9</sup>. L'invariance par rotation exclue des termes comme  $\epsilon_1^1 \epsilon_2^2$ . La structure de  $C$  est donc finalement très simple pour un matériaux isotrope et la relation entre la contrainte et la déformation s'écrit :

$$\sigma = \lambda Tr(\epsilon)I + 2\mu\epsilon \tag{4.8}$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients Lamé et  $I$  le tenseur unité ( $Ia = a$ ). Selon les problèmes, d'autres combinaisons de coefficient sont utilisés, comme par exemple  $(K, \mu)$  ou  $(E, \nu)$  où  $K$  est le coefficient de compressibilité volumique,  $E$  le module d'Young et  $\nu$  le coefficient de poisson, et il existe bien sûr des relations pour relier ces couples les uns aux autres.

Notons que la simplicité de  $C$  permet d'inverser facilement la relation (4.8) qui n'est rien d'autre qu'un système linéaire à 6 équations et 6 inconnus. En prenant la trace de l'équation ci-dessus, nous trouvons<sup>10</sup>  $Tr(\sigma) = (3\lambda + 2\mu)Tr(\epsilon)$ ; en remplaçant dans l'équation (4.8) et en posant  $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$  et  $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)$  on trouve

$$\epsilon = \frac{1 + \nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} Tr(\sigma)I \tag{4.9}$$

7. Exercice : en suivant la démarche variationnelle, démontrer ce résultat.

8. Ce qui n'est pas le cas d'un cristal et les axes principaux de symétrie peuvent montrer des compressibilités différentes

9. Noter que les éléments diagonaux apparaissent deux fois dans cette expression.

10. A trois dimension,  $Tr(I) = 3$ . L'expression de  $\nu$  et  $E$  doit être modifié pour d'autres dimensions.

### 4.3 Les forces de volumes.

Nous n'avons considéré jusque là que des forces s'appliquant à la surface de l'objet. On peut également avoir des forces dans le volume, comme par exemple la force de la gravité. Notre formalisme nous permet de les prendre très facilement en compte. Reprenons notre énergie, en prenant en compte le travail des forces de volumes  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , sans pour l'instant imposer de condition sur le tenseur des contraintes :

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{D}} \left\{ (1/2) \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u})(\nabla \mathbf{u}) - \sigma \cdot \nabla \mathbf{u} - (\mathbf{div} \sigma) \cdot \mathbf{u} - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \right\} dV$$

Nous voyons que nous retrouvons exactement le lagrangien précédent si nous exigeons cette fois du tenseur des contraintes :

$$(\mathbf{div} \sigma) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \tag{4.10}$$

et soumis aux mêmes conditions aux bords que les équations (2.4).

Le calcul reste exactement comme avant : nous calculons d'abord le champ de contrainte via la relation (4.10) et une fois les contraintes en main, nous utilisons la loi de Hook généralisée pour remonter aux champs de déformations. Les déformations connues, nous remontons aux déplacements par une intégration supplémentaire.

### 4.4 Les conditions de compatibilité.

Nous avons passé sous silence des points importants, sans lesquels nous ne pouvons pas faire de calcul. Dans un espace à  $d$  dimension, le tenseur des contraintes possède  $d^2$  éléments, or l'équation  $\mathbf{div} \sigma = 0$  ne fournit que  $d$  équation. Même en exigeant la symétrie du tenseur, il nous reste encore  $d(d-1)/2$  indéterminés.

Les éléments du tenseur  $u_{,j}^i$  ne sont pas indépendant les uns des autres, les dérivées de ces éléments étant les dérivées seconde du vecteur déplacement. Ainsi, nous devons obligatoirement avoir  $\partial_k u_{,j}^i = \partial_j u_{,k}^i$ . Si nous avons calculé un champ de déformation qui n'obéit pas à cette relation, notre solution est à jeter à la poubelle. Nous voyons que cette simple exigence de bon sens nous impose des conditions supplémentaires sur le tenseur des contraintes : nous devons le choisir pour que la solution finale nous procure un champ de déformation sensé. Il se trouve, comme nous allons le voir, que cela nous donne exactement le bon nombre d'équation pour lever toute ambiguïté sur les contraintes.

## 4 Elasticité à dimensions $>1$ .

La petite complication que nous avons à régler provient du fait que l'équation fondamentale (4.8) relie les contraintes non pas aux dérivées du champs de déplacement  $\nabla \mathbf{u}$ , mais à sa partie symétrique  $\epsilon$ . Cela va nous obliger à dériver deux fois au lieu de une fois. Considérons par exemple  $\epsilon_2^1$ . Nous avons, en coordonnées cartésiennes

$$2\partial_{12}\epsilon_2^1 = u_{,212}^1 + u_{,112}^2$$

or nous pouvons changer l'ordre des dérivations et écrire par exemple  $u_{,212}^1 = u_{,122}^1 = \partial_{22}\epsilon_1^1$  ce qui nous donne

$$2\partial_{12}\epsilon_2^1 = \partial_{22}\epsilon_1^1 + \partial_{11}\epsilon_2^2$$

Et en permutant les indices ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ), nous voyons que cela nous procure  $d(d-1)/2$  équations supplémentaire.

Si nous utilisons maintenant la loi de Hook (4.9) et remplaçons les déformations par des contraintes, nous trouvons

$$(1 + \nu)\sigma_{j,kk}^i + \sigma_{k,ij}^k = 0 \tag{4.11}$$

qui est connu sous le nom de condition de Beltrami-Michell.

Si vous l'avez remarqué, toutes les relations que nous avons vu sont formulé à l'aide des opérateurs différentiel **grad**, **div**, ... Le grand avantage de cette formulation est qu'elle est indépendante du système de coordonnées. Les relations de compatibilité que nous avons écrit ci-dessus ne sont valable qu'en coordonnées cartésienne.

## 4.5 Problèmes choisis.

**compression uni-axiale.** Considérons un solide soumis à une pression le long d'une de ses sections, par exemple perpendiculaire  $x^1$  (l'équivalent 3d de la figure 3.2). La solution simple de l'équation des contraintes  $\mathbf{div}\sigma = 0$  est  $\sigma = Cte$ . Sur la face soumis à la pression, les conditions aux limites nous donne  $\sigma \mathbf{n} = P\mathbf{n}$  où  $\mathbf{n} = (1, 0, 0)^T$ . Cela implique que  $\sigma_1^1 = P$ ,  $\sigma_2^1 = \sigma_3^1 = 0$ . La même considération sur les autres faces nous amène à  $\sigma_j^i = 0$  si  $i$  ou  $j$  sont  $\neq 1$ . La loi de Hook (4.9) nous donne les déformations

$$\epsilon_1^1 = P/E ; \quad \epsilon_2^2 = \epsilon_3^3 = -\nu\epsilon_1^1$$

et les termes non-diagonaux sont évidemment nul. Nous avons trouver une solution qui satisfait aux conditions aux limites *et* aux conditions

## 4 *Elasticité à dimensions >1.*

de compatibilité, c'est donc *la* solution. Remarquez la signification du module d'Young, qui est la constante de raideur uni-axiale, et le coefficient de Poisson, le rapport entre l'allongement axial et le rétrécissement transverse. C'est exactement comme cela qu'on les mesure.

Supposons maintenant que le solide est soumis à une force volumique constante  $\rho g$  le long de l'axe  $x^1$ . La solution est cette fois  $\sigma_1^1 = -\rho g x + \Delta P$ , où  $\Delta P$  est la différence de pression entre les deux faces.

**disque sous pression uniforme.**

**disque creux sous pression.**

**disque en rotation.**

**dilatation thermique d'un disque.**

**disque précontraints.**

**torsion d'un cylindre.**

**fonction de green de l'élasticité.**

**Champ de déformation des inclusions.**

## 4.6 La méthode des éléments finis.

La méthode variationnelle est une façon élégante de comprendre l'élasticité. Il se trouve que c'est également une méthode extrêmement efficace pour résoudre numériquement les problèmes de cette branche. Cette méthode numérique s'appelle la méthode des éléments finis dont nous montrons simplement le principe.

## 4.7 Torsion et électromagnétisme.

#### 4 Elasticité à dimensions $>1$ .

L'énergie du milieu élastique que nous avons considéré ne contient pas la partie antisymétrique du tenseur de déplacement. Il existe cependant un milieu élastique très important qui ne contient *que* ce genre de terme et que précédemment on nommait l'éther. De nos jours, l'idée de l'éther est abandonné<sup>11</sup> On suppose simplement l'espace ( $d = 4$ ) rempli d'un champ dont l'énergie ne contient que les termes de torsion.

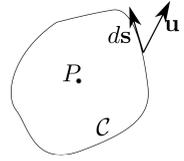


FIGURE 4.4:

La torsion d'un champ vectoriel  $\mathbf{u}$  en un point  $P$  est définie par la *circulation* de ce vecteur autour de ce point, le long d'une courbe (infinitésimal)  $C$  d'aire  $dA$  :

$$\omega_j^i = \frac{1}{dA} \int_C \mathbf{u} \cdot ds$$

Comme le lecteur le sait déjà, cette quantité est mesurée par l'opérateur *rotationnel*, qui transforme un vecteur en un tenseur d'ordre 2 :

$$\omega_j^i = \partial_j u^i - \partial_i u^j$$

ou en notation tensoriel  $\omega = \nabla \times u$ ; l'opérateur  $\nabla \times$  est également noté **curl** ou **rot**. Nous pouvons procéder exactement comme avant et dériver les équation du champs à partir du lagrangien contenant des tenseurs.

Cependant, autour des années 1920, les physiciens et mathématiciens<sup>12</sup> ont commencé à éprouver une grande lassitude devant tout ces opérateurs disparate grad, div, rot, ... et tout les théorèmes qui relient le flux de l'un à l'intégrale de l'autre : une impression de déjà vu et de refaire la même chose avec des notations différentes. C'est à ce moment qu'il s'est développé le langage des "formes" différentielles qui unifie tous ces concepts et leur donne une élégance incomparable.

Une 0-forme est une fonction  $\alpha = f(x)$ , une 1-forme un objet du genre  $\beta = f_1(x)dx^1 + f_2(x)dx^2 + \dots$ , une 2-forme s'écrit  $\gamma = f_{12}(x)dx^1 dx^2 + f_{23}(x)dx^2 dx^3$  est ainsi de suite. L'élément différentiel est parfois noté  $dx^1 \wedge dx^2$  au lieu de  $dx^1 dx^2$  et surtout

$$\begin{aligned} dx^1 dx^1 &= 0 \\ dx^1 dx^2 &= -dx^2 dx^1 \end{aligned}$$

11. Depuis au moins l'expérience de Michelson-Morley et la relativité d'Einstein en 1905.

12. Le grand nom dans ce domaine est celui d'Elie Cartan.

#### 4 Elasticité à dimensions $>1$ .

On peut voir  $dx^1 dx^2$  comme la surface infinitésimal porté par les deux éléments,  $dx^1 dx^2 dx^3$  l'élément de volume porté par les trois éléments, et ainsi de suite. Ce sont bien sûr ces éléments qui apparaissent et c'est exactement dans ce sens qu'il faut comprendre une expression comme  $\int_{\mathcal{C}} \beta$  : on intègre une 1-forme sur une courbe, une 2-forme sur une surface, ...

L'étape importante est la différentiation  $d$ , qui fait correspondre une  $(n+1)$ -forme à une  $n$ -forme. par exemple,  $\alpha = f(x)$ , alors

$$\beta = d\alpha = \partial_1 f . dx^1 + \partial_2 f . dx^2 + \dots$$

de même, par itération, si  $\beta = f_1(x)dx^1 + f_2(x)dx^2 + \dots$ , alors

$$\gamma = d\beta = \partial_1 f_1 dx^1 dx^1 + \partial_2 f_1 dx^2 dx^1 + \partial_1 f_2 dx^1 dx^2 + \partial_2 f_2 dx^2 dx^2 + \dots$$

en utilisant le faite que  $dx^1 dx^1 = dx^2 dx^2 = 0$  et  $dx^1 dx^2 = -dx^2 dx^1$ , on peut regrouper ces termes comme

$$\gamma = (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) dx^1 dx^2 + \dots$$

Nous voyons ainsi que l'opérateur gradient est juste la dérivée d'une 0-forme, la divergence est la dérivée d'une  $(n-1)$ -forme dans un espace à  $n$  dimension, et que le rotationnel que le lecteur connaît correspond à la dérivée d'une 1-forme. Remarquons que nous pouvons facilement définir ainsi le rotationnel d'objet plus compliqué.

Nous avons trois lemmes très important à notre disposition. (i) Le lemme de Poincaré, qui énonce, pour une  $k$ -forme quelconque

$$d^2\omega = 0$$

et qui est très facile à démontrer en jouant à la permutation des indices. (ii) l'intégration d'une forme

$$\int_{\mathcal{D}} d\alpha = \int_{\partial\mathcal{D}} \alpha$$

où  $\mathcal{D}$  est un domaine et  $\partial\mathcal{D}$  la frontière qui la délimite. Cette formule contient tous les théorèmes d'Ostrogradski, Green, Gauss, ... (la circulation d'un vecteur vaut l'intégrale de son rotationnel, le flux d'un vecteur vaut l'intégrale de sa divergence, ...). Enfin, nous pouvons généraliser l'intégration par partie dans un espace à  $n$  dimension

$$\int_{\mathcal{D}} \alpha d\beta = \int_{\partial\mathcal{D}} \alpha\beta - (-1)^m \int_{\mathcal{D}} (d\alpha)\beta$$

#### 4 Elasticité à dimensions $> 1$ .

où  $\alpha$  est une  $n - m - 1$ -forme,  $\beta$  une  $m$ -forme et  $\mathcal{D}$  un  $n$ -volume.

La dernière opération dont nous avons besoin est l'opérateur de Hodge  $*$  qui fait correspondre à la  $(n - k)$ -forme  $\alpha$ , la  $k$ -forme  $*\alpha$ , de façon à ce que leur produit soit une  $n$ -forme<sup>13</sup>. En calcul tensoriel, nous avons l'habitude de parler du produit scalaire de deux vecteurs ou tenseur, la forme  $\alpha(*\alpha)$  représente exactement la même idée. Par exemple, dans un espace cartésien plat à trois dimensions, si  $\alpha = f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + f_3 dx^3$ , alors  $*\alpha = f_1 dx^2 dx^3 + f_2 dx^3 dx^1 + f_3 dx^1 dx^2$  et  $\alpha(*\alpha) = (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) dx^1 dx^2 dx^3$ . Si nous étions dans un espace de Minkowski par exemple,  $*\alpha = f_1 dx^2 dx^3 + f_2 dx^3 dx^1 - f_3 dx^1 dx^2$ .

Bon, assez parlé. Donnons nous un champs dans un espace à 4 dimensions, muni du produit scalaire de Minkowski  $(a, b) = a^0 b^0 - (a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3)$ . Nous représentons notre champs par une 1-forme  $A$ . L'espace également comporte des particules, caractérisé par une 1-forme  $j$  qu'on appelle densité de courant (le quadri-vecteur courant en relativité). Nous stipulons que l'énergie "élastique" du champs n'est fonction que de la torsion de celui ci  $dA$ , et de son interaction avec le courant. La forme la plus simple de l'énergie est alors

$$\mathcal{E} = \int_V (dA)(*dA) + \epsilon A(*j)$$

où  $\epsilon$  est une constante de couplage entre le champs et le courant. En électromagnétisme classique,  $dA$  est représenté sous forme du tu tenseur  $\nabla \times A$  et ses six éléments sont appelés champs électrique et magnétique. D'après notre connaissance des formes, nous pouvons déjà trivialement affirmer que

$$d^2 A = 0$$

et cela représente les deux premières équations de Maxwell ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ,  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ ).

Cherchons maintenant pour quel champ,  $\mathcal{E}$  est extremum : comme d'habitude, faisons une petite variation  $z$  autour du champs  $A$  et développons à l'ordre 1 en  $z$  :

$$\delta \mathcal{E} = \int_V dz(*dA) + (dA)(*dz) + \epsilon z(*j)$$

En faisant une intégration par partie, nous avons

$$\int_V dz(*dA) = \int_{\partial V} z(*dA) - \int_V z(d * dA)$$

---

13. Pour ceux habitués au calcul tensoriel, c'est la transformation d'un contravariant en covariant.

#### 4 Elasticité à dimensions $>1$ .

$$\int_V dA(*dz) = \int_{\partial V} dA(*z) - \int_V d^2 A(*z) = \int_{\partial V} dA(*z)$$

Finalement, en regroupant tous les termes,

$$\delta\mathcal{E} = \left[ \int_{\partial V} z(*dA) + dA(*z) \right] - \int_V \{(d * dA) - \epsilon(*j)\} z$$

Le premier terme est le terme classique de surface, qu'on peut supposer nulle en fixant le champ à l'infini, et le deuxième terme nous donne comme d'habitude notre équation d'Euler Lagrange qui s'écrit

$$d * dA = *j$$

Écrit en fonction des composantes de  $dA$  qui sont les champs électrique et magnétique, cela nous donne les deux dernières équations de Maxwell.

## 4.8 Remarques divers.

**Note sur les opérateurs différentiels.** Parler de la métrique et du produit scalaire, gradient, ... dans les systèmes de coordonnées généralisées. Faire alors dégager la notion de forme linéaire et pourquoi nous avons des indices et des exposants dans la formulation tensorielle.