Propagation des ondes, le retour.

Episode II : les deux transformations.

Nous nous sommes intéressé, lors de l'examen de novembre, et surtout lors de sa correction, à la résolution dl'équation des cordes vibrantes *avec* les conditions initiales imposées :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{2}$$

$$\partial_t u(x,0) = g(x) \tag{3}$$

et nous avons vu que sa solution était donnée par

$$u(x,t) = f(x-ct) + f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi \tag{4}$$

Pour cela, nous avons d'abord résolu la réponse impulsionnelle de la corde, et nous avons montré que nous pouvons intégrer les conditions initiales sous formes de distribution, et qu'en utilisant judicieusement le principe de superposition, on arrivait à la solution. Nous allons établir la même chose, mais en utilisant de façon combiné les TF *et* les TL, ces derniers ayant l'avantage de gérer automatiquement les conditions initiales. Le schéma de la résolution que nous allons mener est la suivante : $u(x,t) \overset{\text{TL}}{\to} \hat{u}(x,s) \overset{\text{TF}}{\to} \tilde{\hat{u}}(q,s) \overset{\text{TL}^{-1}}{\to} \tilde{u}(q,t) \overset{\text{TF}^{-1}}{\to} u(x,t)$. Noter que $t \in [0,\infty]$, donc nous allons effectuer des TL par rapport à cette variable. Par contre, $x \in]-\infty,+\infty[$, donc nous allons procéder à des TF pour cette dernière.

1. En prenant la TL de l'équation (1) par rapport à la variable t, démontrer que

$$-c^2 \frac{d^2 \hat{u}(x,s)}{dx^2} + s^2 \hat{u}(x,s) = sf(x) + g(x).$$

2. En prenant la TF de cette dernière, demontrer que

$$\tilde{\hat{u}}(q,s) = \frac{s}{c^2q^2+s^2}\tilde{f}(q) + \frac{1}{c^2q^2+s^2}\tilde{g}(q)$$

où $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont les TF des fonctions f et g .

3. En prenant la TL inverse, démontrer qu'on obtient

$$\tilde{u}(q,t) = \tilde{f}(q)\cos(ctq) + \frac{\sin(ctq)}{cq}\tilde{g}(q) \tag{5}$$

4. Résultat intermédiare. Démontrer que si la TF de $g(x)$ et $\tilde{g}(q)$, alors

$$\int_{x-a}^{x+a} g(\xi)d\xi \overset{\text{TF}}{\longrightarrow} \frac{2\sin(aq)}{q}\tilde{g}(q)$$

5. En utilisant le résultat intermédiaire ci-dessus, et les règles de translations pour les TF, prendre la TF inverse de (5) pour aboutir au résultat (4)