TD 11

Oscillateur de Van der Pol. Van de Pol à proposé l'équation suivante dans les années 1920 pour modéliser les oscillateurs auto-entretenus comme le battement de coeur

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0 x = 0$$

Le coefficient du terme $\dot{x}$ est équivalent à un frottement. Nous voyons qu'il est *négatif* si l'amplitude x est petite (< 1), c'est à dire que le système reçoit de l'énergie de l'extérieur, ce qui va l'amener à augmenter son amplitude. Par contre si l'amplitude devient trop grande (> 1) le frottement devient positif et le système perd de l'énergie vers l'extérieur, ce qui va diminuer son amplitude. Nous voyons que le système maintient une oscillation stable quelque soit les conditions de départ.

1. Montrer que le point fixe $x = 0$ est instable.
2. En partant de la solution non perturbée $x = a\cos\omega_0 t$, montrez que les perturbations régulières génèrent des termes résonnants.
3. Utilisez la renormalisation de Lindstedt pour éliminer les termes résonnants. Pour cela, chercher la solution sous forme de

$$x(t) = a\cos\Omega t + \epsilon x_1(t)$$

   où $\Omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1$. Vous pouvez apercevoir que l'élilmination des termes résonnants impose une condition sur l'*amplitude* de l'oscillation, ce que l'on appelle un cycle limite.

Écosystème de prédateurs–proies. Une des interaction fondamentale en écologie est celle des prédateurs et des proies. Le premier modèle pour la dynamique de ces deux populations a été proposé par Lotka et Votera au début des années 1930. Soit P le nombre des prédateurs et N le nombre des proies dans l'écosystème. Lotka et Voltera ont proposé

$$dN/dt = \alpha N - \beta NP \quad (1)$$

$$dP/dt = \gamma NP - \delta P \quad (2)$$

α est le taux de croissance naturel des proies en l'absence des prédateurs. La présence des prédateurs cause également la disparition des proies, proportionnellement au nombre de prédateur et de proie, d'où le terme en $-\beta NP$ dans la première équation, β étant l'efficacité de la chasse. Dans l'équation qui régit la dynamique des prédateurs, nous voyons que la croissance est fonction du nombre de proie disponible, et le terme δ est le taux de mort naturel des prédateurs.

1. Montrez que ce système possède un point fixe, c'est à dire des valeurs N_0, P_0 pour lesquels $dN/dt = dP/dt = 0$.
2. Étudiez la solution de ce système pour les faibles écarts au point fixe. Cela veut dire que nous prenons des conditions initiales du genre $N(t=0) = N_0 + \epsilon$ et $P(0) = P_0$. Cherchez la solution sous la forme $N(t) = N_0 + \epsilon N_1(t)$ et $P(t) = P_0 + \epsilon P_1(t)$, et en collectant les termes d'ordre 1 en ϵ, obtenez un système linéaire pour N_1 et P_1. Résolvez ce système et déduisez également la forme du cycle limite, c'est à dire N_1 en fonction de P_1.
3. Poussez les calculs à l'ordre 2 en ϵ et étudiez l'apparition d'harmonique supérieurs.
4. Vous pouvez également remarquer que le cycle limite peut s'obtenir en divisant directement (1) par (2) et en résolvant l'équation différentielle du premier ordre. Comparez le résultat de ce calcul au résultat de la question 2.

Stabilité d'interface. Soit une interface $u(x,t)$ (par exemple entre solide et liquide lors de la coulée continue en métalurgie) décrit par l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -au - bu^3 + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - d\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

où nous supposons les coeffcients $a, b, d > 0$. Discuter la stabilité linéaire de la solution $u(x,t) = 0$ selon que c est positif ou négatif et chercher les seuils d'instabilité.