TD 12 : Algèbre des opérateurs.

1. Identité de Jacobi. Démontrer que pour trois opérateurs A, B, C, nous avons

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$$

2. Commutateur des opérateurs. Démontrer que les opérateurs O et $f(O)$ comuttent. $f(x)$ est une fonction analytique dans le voisinage de $x = 0$. Même chose pour $g(O)$ et $f(O)$. Démontrer que si A et B commutent, alors $f(A)$ et $g(B)$ commuttent.

3. Opérateur moment angulaire. Soit l'opérateur $L_x = Y\partial_z - Z\partial_y$, et L_y, L_z définit de la même façon par permutation circulaire (x, y, z). Démontrer que

$$[L_x, L_y] = -L_z$$

en déduire les deux autres relations par permutation circulaire. Soit l'opérateur $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$. Démontrer que L^2 et L_μ commutent, où $\mu = x, y, z$.

4. exponentiel d'un opérateur. démontrer que

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA)$$

où A est un opérateur linéaire. **Help :** Utiliser le développement de l'exponentiel et les régles habituelles de la dérivation.

5. exponentiel d'un opérateur (encore). Démontrer que $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$ où A, P sont deux opérateurs linéaires.

6. Commutation et exponentiel. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2. En déduire une expression générale pour A^nselon que n est pair ou impair. Démontrer alors que

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Help : Décomposer la somme en terme pair et impair, et utiliser le dévéloppement en série des fonctions sin et cos. Soit maintenant les deux matrices

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;,\; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer que $C^2 = D^2 = 0$ et en déduire $e^C.e^D$. Que peut ont dire de $e^C e^D$ et e^{C+D} ?

7. exponentiel de la somme. Démontrer que pour deux opérateurs A et B (qui ne commuttent pas à priori)

$$e^{(A+B)t} = e^{At} + \int_0^t e^{A(t-s)} B e^{(A+B)s} ds$$

Pour cela, souvenez vous que la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$y' - ay = f(x)$$

est donné par

$$y = e^{at} y_0 + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s) ds$$

Consdérer maintenant l'opérateur $U(t) = \exp((A+B)t)$. Nous pouvons obtenir une équation différentielle proche de l'équation ci-dessus pour U. Cette relation (appelé en mécanique quantique la relation de Dyson) est très utile quand nous savons calculer $\exp(At)$ et que la matrice représentant B est très creuse.

8. Equation d'onde. Résoudre symboliquement l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

avec les conditions initiales $u(x,0) = f(x)$ et $\partial_t u(x,t)|_{t=0} = g(x)$ en l'écrivant sous la forme symbolique $\partial^2 u/\partial t^2 - c^2 D^2 u = 0$ et en vous inspirant de la solution de l'équation ordinaire $u'' - a^2 u = 0$.

9. Opérateur D dans la base des Bessels. Soit les fonctions de Bessel I_n définie par

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x\cos\theta} \cos(n\theta) d\theta$$

Démontrer que

$$I_n'(x) = (1/2)\left(I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)\right)$$

Les fonctions $\exp(-x) I_n(x)$ $(n = 0, 1, ...)$ forment une base. Donner l'expression de la matrice de l'opérateur D dans cette base. [Très important dans les problèmes de matrices tridiagonal.]