TD 13 : Opérateurs linéaires II.

1. Soit les fonctions de Bessel I_n définie par

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\cos(n\theta)d\theta$$

Démontrer que

$$I'_n(x) = (1/2)\left(I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)\right)$$

Il n'est pas difficile de voir que $I_n(x) = I_{-n}(x)$. Les fonctions $\exp(-x)I_n(x)$ ($n = 0, 1, ...$) peuvent former une base dans un certain sous espace des fonctions. Donner l'expression de la matrice de l'opérateur D dans cette base. [Très important dans les problèmes de matrices tridiagonal.]

2. Soit les fonctions d'Hermite

$$h_n(x) = C_n(-1)^n \exp(x^2/2)\frac{d^n}{dx^n}\exp(-x^2) \tag{1}$$

Les premières fonctions sont (en multipliant par $\exp(-x^2/2)$) $1, 2x, 4x^2 - 2$,... Les coefficients C_n que nous n'explicitons pas assurent que les fonctions sont normées. On peut démontrer, avec un peu d'effort, que les fonctions h_n sont deux à deux orthogonales et forment une base.

Démontrer que pour l'opérateur

$$H = -D^2 + X^2$$

nous avons $Hh_n(x) = (2n+1)h_n(x)$. Donner alors la représentation de H dans la base des h_n.

3. Montrer que si L'opérateur M commute avec tous les autres opérateurs, alors $M = \alpha I$. [Help : donnez vous une base quelconque $(e_1, ..., e_n)$ et considerer l'opérateur projection sur e_1 : $P_1 e_j = \delta_{i,j} e_1$. En utilisant la commutation de M avec cet opérateur et d'autres opérateurs de projection, démontrer que la matrice de M dans cette base est diagonale. Ensuite, considérer un opérateur de permutation cyclique $\Pi e_i = e_{i+1}$ et considérer sa permutation avec M : en déduire que tous les élements diagonaux de M sont alors égaux.

4. Supposons que l'opérateur A est diagonalisable et soit λ_n ses valeurs propres (qu'on suppose distincts). Démontrer que

$$\Pi_n(A - \lambda_n I) = 0$$

[Help : Décomposer un vecteur quelconque sur la base propre de A et étudier l'action de l'opérateur ci-dessus sur ce vecteur.]