TD Sturm-Liouville (I).

1.Fonction de Bessel. Démontrer que la fonction

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(x\sin\theta - m\theta\right) d\theta$$

est solution de l'équation de Bessel.

2.Polynômes de Legendre associés. Soit la fonction $u(x)$ solution de l'équation de Legendre

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0$$

Démontrer alors que la fonction $v(x) = (1-x^2)^{m/2}(d^m/dx^m)u(x)$ est solution de l'équation de Legendre associée

$$(1-x^2)v'' - 2xv' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)}\right)v = 0$$

Si on sait que le polynôme de Legendre P_n est d'ordre n, que peut on déduire pour P_n^m pour $m > n$? Construire explicitement les trois premiers polynomes de Legendre.

Help : Commencer par démontrer par récurrence que

$$d^m\left[(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u\right] = (1-x^2)d^{m+2}u - 2(m+1)xd^{m+1}u + \left[n(n+1) - m(m+1)\right]d^m u$$

où d^m est l'opérateur de dérivation d'ordre m.

3.Moment cinétique. Soit l'opérateur $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$. Démontrer que l'opérateur laplacien, en coordonnées sphérique, s'écrit comme

$$\Delta = r^{-2}\left\{\partial_r r^2 \partial_r + L^2\right\}$$

4.Equation d'Hermite. Comment se transforme l'équation

$$f'' - x^2 f = -\lambda f$$

si on pose $f(x) = e^{-x^2/2}g(x)$?

5.Equation de Mathieu. Comment cette equation se tranforme si on pose $x = \cos(t)$?

$$(1-x^2)v''(x) - xv'(x) + b(2x^2-1)v(x) = -av(x)$$

6.Atome d'Hydrogène. Résoudre en coordonnées sphérique l'équation de l'atome d'Hydrogène :

$$i\partial_t\psi = (-\Delta + \alpha/r)\psi$$