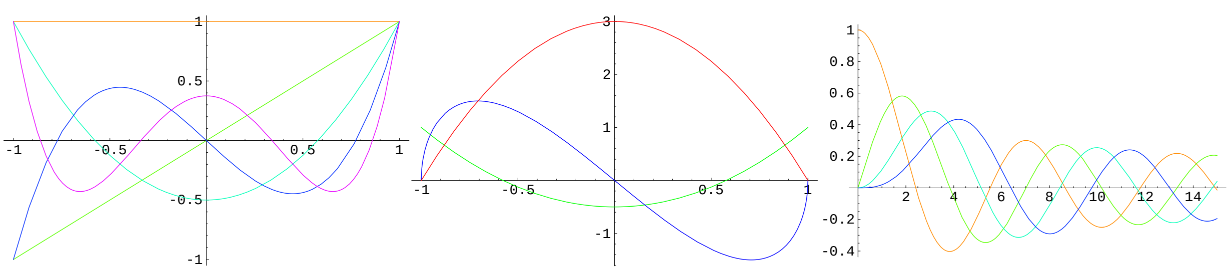
Complément TD Sturm-Liouville.

1. En ramenant l'équation suivante
$$x^2 u'' + \nu x u' + \left(x^2 - m^2\right) u = 0$$
à une équation de Bessel, donner sa solution générale. [Help : poser $u = x^\alpha w$ et choisir α en conséquence. Solution : $u(x) = J_{\pm\mu}(x)/\sqrt{x}$ où $\mu^2 = m^2 + (\nu - 1)^2/4$.

2. Utiliser le résultat de l'exercice précédent pour donner la solution générale de l'équation d'onde en coordonnées sphériques
$$\partial_{tt} u = \Delta u$$
Help : en notatation opératoriel, l'équation s'écrit
$$\left(\partial_{tt} - r^{-2}\left\{\partial_r r^2 \partial_r + L^2\right\}\right) u = 0$$
Comme nous connaissons les fonctions propres de ∂_{tt} $(= \exp(\pm kt)$) et de L^2 $(= Y_n^m(\theta, \phi)$), il suffit de chercher la solution générique sous la forme de
$$u(r, \theta, \phi, t) = R(r) Y_n^m(\theta, \phi) e^{\sigma i k t}$$
où $\sigma = \pm 1$ et $|m| \leq n$, et obtenir une équation pour $R(r)$. On devrait obtenir, pour R :
$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{\sigma'(n+1/2)}(kr)$$
où $\sigma' = \pm 1$. Ces fonctions sont parfois appelées des Bessel sphériques.

3. Démontrer que pour m entier, $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$. Cela montre que pour m entier, les deux fonctions J_m et J_{-m} ne sont pas linéairement indépendantes. L'équation de Bessel étant de second ordre, elle a besoin de *deux* solutions indépendantes. L'autre solution notée souvent $Y_m(x)$ est appelé la fonction de Bessel de seconde sorte. [Help : effectuer le changement de variable $\theta \to \pi - \theta$].



(a) Les Polynomes de Legendre d'ordre 0 à 4

(b) $P_2^m(x)$ pour $m = 0, 1, 2$

(c) Les fonctions de Bessel J d'ordre 0 à 3

FIG. 1 – Legendre et Bessel.