TD3 : Les systèmes Sturm-Liouville

La fonction poids, les poylnômes orthogonaux.

1. Calculer la fonction poids pour les équations suivantes ; mettre ces équations sous forme SL :

1. Equation de Legendre $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$
2. Equation de Mathieu $(1-x^2)y'' - xy' + n(n+1)y = 0$
3. Equation de Bessel $x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - m^2)y = 0$
4. Equation de Bessel $y'' + (1/x)y' + (k^2 - m^2/x^2)y = 0$
5. Equation de Bessel modifiée : $x^2y'' + \nu xy' + (x^2 - m^2) = 0$
6. Equation de Laguerre $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$
7. Equation d'Hermite $y'' - 2xy' + 2ny = 0$
8. $x^3y'' + xy' + 2y = 0$

2. Démontrer que le système suivant, où tous les coefficients sont réél,

$$(x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)y'' + (\beta_1 x + \beta_0)y' - \lambda y = 0$$

n'a pas de solution polynomiale si $\alpha(x)$ a deux racines complexes [Help : démontrer d'abord que $w\alpha$ n'est pas suffisement rapidement décroissant et ensuite qu'on ne peut pas trouver $w\alpha$ continue s'annulant en deux points, pour pouvoir ensuite le connecter à la solution $w\alpha = 0$. Pour démontrer ce dernier point, remarquer que $\alpha(x)$ peut se mettre sous la forme de $(x-a)^2 + b^2$ et que $\int dx/\alpha(x) = (1/b)Arctg\,(x-a)\,/b$].

3. Démontrer que le système SL

$$\alpha(x)y'' + (\beta_1 x + \beta_0)y' - \lambda y = 0$$

n'a pas de solution poylnomiale si $\beta_1 x + \beta_0 \equiv 0$.

4. Soit $\{P_n\}$ et $\{Q_n\}$ deux ensembles de polynômes orthogonales, avec le même poids $w(x)$. Démontrer alors que les deux polynomes sont proportionnel : $P_n = a_n Q_n$. Autrement dit, à un coefficient multiplicatif près, les polynômes orthogonaux associés à un poids sont unique.

5. Démontrer que si les polynômes $\{P_n(x)\}$ sont les fonctions propres d'un système SL avec le poids $w(x)$, alors les polynomes $\{P'_n(x)\}$ sont orthogonaux avec le poid $w(x)\alpha(x)$.

6. Déduire de la question précédente que les polynômes ultrasphériques $G_n^m(x)$ s'obtiennent à partir des polynomes de legendre :

$$G_{n-m}^m(x) = \frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$$

Quelle est la relation entre les ultrasphériques et les fonctions de legendre associés ?

7. Les polynômes de Tchebychev $T_n(x)$ sont des polynômes de Jacobi pour $p = q = -1/2$. En écrivant l'orthogonalité des ces fonctions (et en supposant $T_n(1) = 1$) déduire que $T_n(\cos(\theta)) = \cos n\theta$.

8. A quelle équation obéit la fonction $f_n(x) = (1/\sqrt{x})H_{2n+1}(\sqrt{x})$? Pouvez vous établir une relation entre cette fonction est un polynôm de laguerre associé ?