TD #4 : SL et polynômes orthogonaux.

Oscillateur harmonique en M.Q.

Nous souhaitons résoudre l'équation aux valeurs propre

$$-u''(x) + k^2 x^2 u(x) = Eu(x) \tag{1}$$

Quelles sont les fonctions et valeurs propres de cette équation (nous savons que pour des raison de physique, nous devons avoir $u(\pm\infty) = 0$) ?

1. Poser $u(x) = e^{f(x)} v(x)$ et déduire une équation pour $v(x)$. Comment cette equation se transforme si on choisit $f'(x) = -kx$?

2. L'équation obtenu commence à ressembler à une équation d'Hermit : terme constant comme coefficient de v'', terme linéaire comme coefficient de v' et à nouveau terme constant comme coefficient de v. Nous souhaitons mettre cette équation sous la forme standard

$$\phi''(y) - 2y\phi'(y) = \lambda\phi$$

Il nous suffit donc de procéder à un changement d'echelle : poser $y = ax$ et $v(x) = \phi(y)$ pour transformer l'équation en v sous forme standard. Donner les vecteur et valeurs propre de cette dernière équation.

3. Donner finalement la solution complète de (1).

Les formes alternatives d'une équation de SL.

Cela ne vous a probablement pas échappé que nous avons effectué une transformation (on suppose $k = 1$) $u = e^{-x^2/2} v$ pour obtenir une équation d'Hermite, et que précisément la fonction e^{-x^2} est le poids associé à ces fonctions. Cela n'est évidemment pas un hasard et cela découle d'un principe beaucoup plus général. Soit $y(x) = (1/\sqrt{w\alpha})u(x)$, où y est la solution d'un système Sturm-Liouville $\alpha y'' + \beta y' = \lambda y$. Démontrer que u obéit à une équation du genre

$$u'' + Ru = 0$$

Remarquer qu'on n'a pas besoin de calculer explicitement R pour répondre à cette question ; il faut juste démontrer que le coeffcient du terme en u' s'annule. Cette forme (si on avait pris la peine d'expliciter R)est le point de départ d'une approximation célébre, appelé WKB (ou semi-classique). On l'appelle également la deuxième forme d'une équation SL.

Relations de récurrence.

Démontrer que les polynômes orthogonaux obéissent à la relation de récurrence

$$f_{n+1}(x) = (A_n + B_n x) f_n(x) + C_n f_{n-1}(x)$$

où vous obtiendrez les coefficients A_n, B_n, C_n. [Help : Choisir A_n, B_n pour que $\Delta = f_{n+1} - (A_n + B_n x) f_n$ soit un polynôme de degrés $n-1$ et projeter cette différence sur la base des f_i pour $i \leq n-1$. Il faut utiliser le fait que $(f_k, x^l)_w = 0$ si $l < k$]

Quelques transformations.

Démontrer et que $L_n^{(-1/2)}(x) = H_{2n}(\sqrt{x})$ (Les polynômes sont définis à une constante multiplicative près). [Help : partir de l'équation définissant les Hermite d'ordre $2n$ ($u'' - 2xu' = -2nu$). La question nous incite à poser $x = \sqrt{y}$ et $u(x) = \phi(y)$. Transformer l'équation d'Hermit avec ce changement de variable pour aboutir à une équation de Laguerre.]