

Calcul des Variations, TD #1

L'identité de Beltrami. Soit la courbe y , l'extremum de la fonctionnelle $S[y] = \int_I L(y, y') dx$ (le lagrangien ne dépend pas explicitement de la variable indépendante). Démontrer que

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \mathcal{L} \right) = 0$$

Le brachistochrone. Pour une courbe $y(x)$ parcouru par un mobil sans frottement sous la seule force de gravité, le temps de parcours pour aller du point $(0, 0)$ au point (x_1, y_1) est donné par

$$T = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx$$

Nous souhaitons trouver la courbe $y(x)$ qui minimise le temps de parcours.

1. Utiliser l'identité de Beltrami pour démontrer que y doit obéir à l'équation

$$y(1 + y'^2) = 2a$$

où $2a$ est une constante arbitraire (pour l'instant).

2. mettre cette équation sous la forme $dx = (\dots) dy$ et l'intégrer en posant $y = a(1 - \cos \theta)$. Dédurre l'équation (paramétrique) de la courbe.

Surface minimum. Trouver l'équation $r(z)$ de la surface minimale reliant cercles concentriques dont les centres sont le long de l'axe z et les plans parallèle au plan xy .

Energie de courbure. Quelle est l'équation d'Euler Lagrange si le lagrangien comporte un terme en y'' ? Une poutre élastique est essentiellement gouverné par son énergie de courbure : $\mathcal{E} = \int_I y''^2 dx$. Trouver l'équation d'équilibre d'une poutre à l'horizontal soumis à la gravitation. Que faut-il supposer sur les conditions aux bord? Comment faut il modifier l'équation si la masse de la poutre est variable? Donner également l'équation de vibration de la poutre.

Champ harmonique. Quelle est l'équation d'Euler-Lagrange pour la fonction $f(x, y, z)$ qui minimise la fonctionnelle suivante, la valeur de la fonction étant fixée sur les bord du domaine V .

$$S[f(x, y, z)] = \int_V (\nabla f)^2 dx dy dz$$

Généraliser le résultat au champ $f(x, y, z, t)$

$$S[f(x, y, z, t)] = \int_V \left\{ (\nabla f)^2 - (\partial_t f)^2 \right\} dx dy dz dt$$