Champs électromagnétique : formalisme lagrangien.

TD6, L3 Physique Recherche.

INTRODUCTION.

Nous définissons un champ $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ dans un espace à 4 dimensions que l'on repère à l'aide des coordonnées $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$[1]. Chacune des composantes du champ est donc fonction de la corrdonnées : $A_i = A_i(x)$. Comme nous sommes parfois trop habitué à la séparation en espace (3d) et en temps, nous dissocions parfois les expressions ci-dessus en donnant des noms différents aux différents composants : nous notons par exemple $A = (\phi, -\mathbf{A})$ où nous appelons ϕ le potentiel et $\mathbf{A}$ le potentiel vecteur ; de même, nous notons $x = (t, \mathbf{x})$ où le premier composant est appelé temps et les trois autres l'espace. Les équations d'électromagnétisme ont été formulées dans le cadre de cette séparation étrange et les différentes dérivées du champ ont reçu des noms différents. Par exemple, on appelle champ électrique le vecteur à 3 dimensions

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla\phi$$

et champ magnétique

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$$

En physique, on appelle souvent A ou x un quadri-vecteur tandis que $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ ou $\mathbf{x}$ sont simplement appelé vecteurs. Il suffit dans la suite de faire attention à cette distinction. Revenons à notre formulation générale. Le tenseur électromagnétique est défini par

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

Ce tenseur est bien sûr anti-symétrique $F_{ik} = -F_{ki}$.

LES DEUX PREMIÈRES EQUATIONS DE MAXWELL.

1. Donner l'expression du tenseur F en fonction des champs E_i et H_k.
2. Démontrer que pour trois indices i, j, k, la definition même du tenseur F impose

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_j} = 0$$

démontrer que les seules équations non-triviales sont celles où $i \neq j \neq l$ et cela nous donne 4 équations que nous pouvons regrouper en

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{H} \\ \nabla.\mathbf{H} &= 0 \end{aligned}$$

qui ne sont rien d'autre que les deux premieres équations de Maxwell.

LES DEUX DERNIÈRES EQUATIONS DE MAXWELL EN ABSCENCE DE PARTICULES.

Dans l'espace-temps relativiste, la "distance" ds entre deux points voisins est donnée par

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = \sum_{i=0}^{3} \epsilon_i x_i^2$$

où $\epsilon_0 = 1$ et $\epsilon_{i\geq 1} = -1$. Il existe une différence entre une des composantes et les trois autres quant au signe qu'il faut utiliser pour l'élément d'arc. Cette différence apparaît obligatoirement dans toutes les expressions des lois physiques. En particulier, toutes les expressions quadratiques auront une forme similaire à l'expression de l'élément d'arc. Par exemple, l'action du champs électromagnétique est donnée par l'intégrale sur un volume du Lagrangien suivant[2] :

$$\mathcal{L}_{champ} = -\sum_{i,j=0}^{3} \epsilon_i \epsilon_j F_{ij}^2 \qquad (1)$$

Remarquer la similarité entre cette formulation et la formulation de la théorie de l'élasticité, où le champs A représente le vecteur déplacement et le tenseur F_{ij} le tenseur déformation. Ceci n'est pas un hasard ; Maxwell lui même imaginais l'ether comme un corps élastique et s'inspirait fortement de la théorie de l'élasticité.

1. Déduire que l'on peut mettre le Lagrangien sous forme de $\mathcal{L} = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$
2. Déduire les équations du champs

$$\sum_{j=0}^{3} \epsilon_i \epsilon_j \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Nous avons vu en cours le cas d'une fonction dépendant de plusieurs variables ou plusieurs fonctions dépendant d'une variable. Ici, nous combinons les deux : nous avons quatre fonctions de quatre variables.

3. Mettre ces équations sous la forme plus usuelle des deux autres équations de Maxwell :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{E} \;\; ; \;\; \nabla.\mathbf{E} = 0$$

LES EQATIONS DU CHAMP EN PRÉSENCE DES PARTICULES.

L'espace (à quatre dimension) n'est pas seulement rempli de champ, mais également de particules. Une particule élémentaire est une courbe dans l'espace. Nous pouvons définir cette courbe par la données des coordonnées $(x_0(u), x_1(u), x_2(u), x_3(u))$ en fonction d'un paramètre que nous avons noté u. Très souvent, la première coordonnée x_0 est utilisé comme paramètre, noté t et l'on décrit la courbe par $(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. Le quadrivecteur vitesse est la dérivée de la courbe : $v = (1, \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t))$. Les particules sont couplées aux champs, et l'amplitude de ce couplage pour chaque particule est appelé sa "charge" q. le produit de ce scalaire par la vitesse est appelé le courant $j = qv$. A nouveau, il est plus courant dans la littérature de présenter ce (quadri-) courant sous la forme $j = (q, \mathbf{j})$. Quand nous avons plusieurs particules (courbes), le courant est la somme de tous les courant existant. Comme d'habitude, en présence d'un nombre important de particules, nous pouvons utiliser l'intégrale pour faire des sommations et écrire

$$J = \int_V j dV$$

où la quantité j est appelé maintenant une densité de (quadri-) courant et noté souvent $(\rho, \mathbf{j})$. La densité de courant est maintenant également un (quadri-) champs, défini en chaque point de l'espace.

En présence des particules, il faut ajouter un terme d'intéraction entre champ et particule à l'action :

$$S = \int_V \mathcal{L}_{champ} dV + \int_{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{interaction} dV$$

où l'intéraction champ-particule est le couplage linéaire le plus simple possible

$$\mathcal{L}_{interaction} = -\epsilon_i j_i A_i$$

1. Etant donné un champ de densité de courant j dans l'espace, déduire les équations du champ électromagnétique.
2. Mettre ces résultats sous la forme classique des deux équations de Maxwell

$$\nabla . \mathbf{E} \;=\; \rho$$

$$\nabla \times \mathbf{H} \;=\; \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{E}$$

POUR ALLER PLUS LOIN.

Dans le problème que nous venons de faire, nous nous sommes données les particules (et donc les courants) et nous avons déduit le champ EM. Evidemment, les courbes (particules) sont elles-mêmes influencé par le champ EM. Nous aurions pu nous donner le champ EM, et déduire la ligne d'univers de la particule. L'action en rélativité pour une particule sans champ s'écrit

$$S = -m \int_C ds$$

où m est un paramètre de proportionnalité appelé masse. A cela, nous devons ajouter l'action dûe à l'intéraction avec le champ que nous connaissons déjà :

$$S = -m \int_C ds - q \int_C \epsilon_i A_i dx_i$$

Il suffirait maintenant de déduire les équations d'Euler-Lagrange qui nous donnent la ligne de l'univers de la particules. Le problème est suffisement long et nous nous arrétons là.

Remarquez que cette formulation n'est pas entièrement satisfaisante. Nous n'avons pas donné une dérivation unique. Nous avons soit supposé donné les particules et nous avons déduit le champ EM, soit l'inverse. Nos théories ne sont pas capable pour l'instant[3] de donner une dérivation unique des champs et particules en même temps, cela mène à quelques divergences mathématiques. Nous avons une téchnique assez compliquée de contourner ces difficultés, inventé par Feynman dans les années 1940, mais les mathématiques restent assez sales.

---

[1] Nous évitons pour l'instant les exposants et notons les coordonnées x_i au lieu de x^i.

[2] Le signe moins n'a pas de conséquence pour nos calculs, mais assure que la solution trouvée est un minimum plutôt qu'un maximum de l'action.

[3] Cela dure depuis plus de cent ans