Calcul des variation, TD#3

Energie de courbure. Comment faut-il écrire les équations d'Euler-Lagrange si le Lagrangien contient des dérivées secondes ? Plus spécifiquement, supposer que le Lagrangien est de la forme $\mathcal{L} = y''(x)^2 + V(y)$. Généraliser ensuite au cas $\mathcal{L} = \mathcal{L}(y'', y', y, x)$.

Equation général d'un champ. Déduire l'équation du mouvement d'un champ dans un espace à $n-$dimension anisotrope, où l'expression de l'énergie potentielle (interne) est donné par

$$V = \int_I \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\mathbf{r}$$

où pour les coefficients, nous pouvons supposer $a_{ij} = a_{ji}$ (pourquoi ?). Ce genre d'expression se rencontre fréquemment dans des problèmes comme l'élasticité des cristaux, où les déformations dans les différentes directions ne sont pas équivalentes.

Trajectoire complexe. Soit une fonction $y(x)$ complexe ($\mathbb{R} \to \mathbb{C}$) dont l'action est définie par

$$S[y] = \int_I \mathcal{L}(y, y', y^*, {y^*}'; x) dx$$

Comme par exemple $\mathcal{L} = y' {y^*}' + kyy^*$. Obtenir les équations d'Euler-Lagrange de cette fonction. [Help : il faut démontrer que l'on peut considerer y et y^* comme deux composantes indépendantes, et obtenir une equation d'EL pour chacune].

Equation de Schrodinger. Nous cherchons la fonction complexe $\psi(x, t)$ qui optimise l'action associé au Lagrangien suivant

$$\mathcal{L} = i\psi^* \partial_t \psi - a(\partial_x \psi^*)(\partial_x \psi) - V(r)\psi^* \psi$$

Trouver l'équation d'Euler Lagrange auquel obéit la fonction ψ. Dans la formulation ci-dessus, ψ et ψ^* ne jouent pas le même rôle. Pouvez vous donner une version plus symétrique de ce Lagrangien ?