Calcul des variation, TD#4

Equation de la chainette. Une chaîne $y(x)$ est suspendu entre deux points distant de a. La longueur totale de la chaîne est L. Trouver l'équation de la chaîne. Help : A l'évidence, la chaîne doit minimiser l'énergie potentielle, avec une contrainte sur sa longueur. L'energie potentielle est de la forme $\int \rho y ds$; on doit donc trouver le minimum de

$$H' = \int_{-a/2}^{a/2} \left\{ \rho y \sqrt{1 + y'(x)^2} - \lambda \sqrt{1 + y'(x)^2} \right\} dx$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange. Obtenez également l'équation de la chaînette à laquelle on a suspendu un pont.

Schrodinger. Quelle est la fonction complexe $\psi(x,t)$ qui optimise l'action associé au Lagrangien suivant

$$\mathcal{L} = a(d_x\psi^*)(d_x\psi) + V(r)\psi^*\psi$$

avec la contrainte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi\psi^* dx = 1$$

Isopérimétrique. Soit la courbe paramétrique $(x(t), y(t))$, $t \in [0,1]$ fermée, c'est à dire $x(1) = x(0)$ et $y(1) = y(0)$. L'air enfermé par la courbe est donné par

$$A = (1/2) \int_0^1 (x'y - xy')dt$$

Trouver la courbe qui maximise l'air, en gardant le périmètre constant.

Isopérimétrique inverse. Soit la courbe $y(x)$ fixée à $y = 0$ aux extrémité $x = \pm 1$. Quelle est la courbe de surface donnée qui minimise son périmètre ? Par surface, nous entendonssurface sous la courbe $y(x)$ et nous supposons $y > 0$.

Sturm-Liouville. Trouver l'extrémum de la fonctionnelle

$$S[y] = \int_I \left(p(x)y'^2 + q(x)y^2 \right) dx$$

soumise à la contrainte

$$\int_I w(x)y^2 dx = 1$$

où $w(x) > 0$ sur l'intervalle I.