

1 Les opérateurs différentiels.

La plupart des phénomènes physiques sont décrits par des équations différentielles qui impliquent des opérateurs différentiels. On rencontre souvent les gradients, rotationnelles, divergences et laplaciens et le fait que l'espace dans lequel vivent les physiciens ait trois dimensions a peut-être favorisé leurs usages au dépend d'autres formulations plus symétriques¹. Fondamentalement, ce sont des opérateurs de dérivation et nous allons nous attacher dans ce chapitre à étudier leurs significations et à établir leurs expressions dans divers systèmes de coordonnées.

1.1 Métrique et Système de coordonnées.

Nous repérons les points dans l'espace à l'aide d'un système de coordonnées. Par exemple, pour un espace à trois dimensions, nous associons un triplet (q_1, q_2, q_3) à chaque point P de l'espace. Cet acte fondateur nous permet de ramener la géométrie, science des relations entre points de l'espace, dans le domaine de l'analyse et y appliquer toute la puissance de feu dont on y dispose.

Les points de l'espace ont une existence propre, indépendamment de la représentation en triplet que l'on utilise. Que le triplet qu'on utilise soit les coordonnées cartésiennes ou polaires ne change pas le point P ni (soulignons mentalement deux fois ce *ni*) la distance de ce point à un autre. Si la distance entre deux points est 1 mm, cela ne doit pas dépendre du système de coordonnées cartésienne ou polaire que nous avons choisi. Supposons que nous avons repéré un point P par le triplet (q_1, q_2, q_3) et le point infinitésimalement voisin $P + dP$ par le triplet $(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, q_3 + dq_3)$. Notons ds la distance entre P et $P + dP$. La relation entre la distance ds et le triplet (dq_1, dq_2, dq_3) définit la métrique du système de coordonnées. Nous nous contenterons par la suite de systèmes de coordonnées *orthogonales* (cartésien, polaire, cylindrique,...) pour lesquels, de façon général, nous avons :

$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 \quad (1.1)$$

Les quantités h_1, h_2, h_3 dépendent en général des coordonnées q_i . On les appelle les éléments du tenseur métrique². Il est évident que si pour un certain déplacement, nous

-
1. Voir le chapitre sur les formes différentielles
 2. Dans le cas le plus général, l'élément de distance curviligne s'écrit

$$ds^2 = \sum_{i,j} h_{i,j} dq_i dq_j$$

et la matrice H dont les éléments sont les $h_{i,j}$ s'appelle le tenseur métrique. Dans le cas des coordonnées curvilignes orthogonales, les éléments non-diagonaux sont nulles et ds^2 peut s'écrire sous la forme plus

1 Les opérateurs différentiels.

avons $dq_2 = dq_3 = 0$, alors $ds = h_1 dq_1$ tout simplement.

Coordonnées cartésiennes. On le note souvent par le triplet (x, y, z) . C'est le plus simple des systèmes, pour lequel $h_1 = h_2 = h_3 = 1$.

Coordonnées polaires. On le note souvent (r, θ, z) . Comme dans ce système,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

nous avons $h_1 = 1$, $h_2 = q_1 = r$ et $h_3 = 1$.

Coordonnées sphériques. On le note souvent (r, ϕ, θ) . Ici

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + r^2 d\theta^2$$

et donc $h_1 = 1$, $h_2 = q_1 \sin \theta = r \sin \theta$, $h_3 = q_1 = r$.

Coordonnées semi-paraboliques. On le note souvent (σ, τ, z) . Ce système est relié au cartésien par les relations

$$x = \sigma\tau; y = (\tau^2 - \sigma^2)/2; z = z$$

Démontrez que les éléments du tenseur métrique sont $h_1 = h_2 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$, $h_3 = 1$.

Coordonnées paraboliques. On le note souvent (σ, τ, ϕ) , relié au système cartésien par

$$x = \sigma\tau \sin \phi; y = \sigma\tau \cos \phi; z = (1/2)(\tau^2 - \sigma^2)$$

Trouvez les éléments du tenseur métrique.

Problème. En coordonnées cartésienne, la surface $q_i = Cte$ est un plan. Donnez des définitions analogues pour les autres systèmes de coordonnées.

En réalité, la démarche est la suivante : une fois que nous avons un système de coordonnées (q_1, q_2, q_3) , c'est la donnée du tenseur métrique qui nous indique quel est ce système, où même plus, si l'espace est plat ou courbé (mais ceci est une autre histoire).

1.2 Nabla, div et les autres.

Les opérateurs différentiels ont tous un sens géométrique (disons même plus, physique). Ce ne sont pas juste des règles de dérivation du genre $\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1$. Si on connaît ce sens, on peut comprendre le sens profond de l'équation qui les contient. Par ricochet, il devient très facile de déduire leurs expressions dans n'importe quel système de coordonnées. C'est ce à quoi nous allons nous attacher par la suite. Notons quand même que

simple de 1.1.

ces opérateurs ne sont pas si dissemblable qu'il n'y paraît et tous relient, d'une façon ou d'une autre, un flux à travers un point, un circuit ou une surface fermée à une intégrale. Dès la fin du dix-neuvième siècle, cette similitude a amené E. Cartan à inventer la notion de formes différentielles qui unifie tous ces opérateurs, qui ne sont alors que l'expression d'une opération de dérivation (qu'on appelle extérieure). Ces formes d'une élégance extraordinaire font l'objet d'un autre chapitre. Ici, nous nous attacherons à une introduction *classique* de ces opérateurs.

1.3 Le gradient.

Soit la fonction $f(P)$ qui à chaque point de l'espace associe une quantité. Le nom savant de cela est un *champ scalaire*. Cela peut être une densité, un potentiel, ... Nous sommes intéressés par savoir de combien cette fonction change si on passe du point P au point voisin $P + ds$. Le gradient est la quantité physique qui nous donne cette information :

$$df = f(P + ds) - f(P) = \mathbf{grad}f \cdot ds \quad (1.2)$$

$\mathbf{grad}f$ qu'on note également ∇f est un *vecteur* dont le produit scalaire avec le déplacement ds donne la variation de f . Ceci est la *définition* du gradient. ∇f à priori dépend du point P . Notez que jusque là, nous avons exprimé la variation indépendamment du système de coordonnées choisi pour repérer les points de l'espace. Une quantité physique ne doit jamais dépendre du système de coordonnées et sa définition doit toujours être donnée de façon intrinsèque, indépendamment des coordonnées. Quand en mécanique, nous écrivons $\mathbf{F} = m d^2 \mathbf{r} / dt^2$, ceci est une relation qui est valable quelque soit le système de coordonnées. La même chose s'applique aux opérateurs différentiels que nous utilisons en physique.

Évidemment, une fois que nous avons exprimé les choses de façon intrinsèque, il faut ensuite faire le boulot et calculer la trajectoire, les lignes du champ, les isopotentiels, ... Pour cela, nous devons choisir un système de coordonnées. Donc, nous avons besoin d'exprimer ∇f dans un système de coordonnées, celui qui convient le mieux au problème considéré. Supposons que le point P est repéré par (q_1, q_2, q_3) et le point voisin par $(q_1 + dq_1, q_2, q_3)$. Alors $df = f(q_1 + dq_1, q_2, q_3) - f(q_1, q_2, q_3) = (\partial f / \partial q_1) dq_1$. Le membre de droite de l'équation (1.2) vaut

$$(\nabla f)_1 h_1 dq_1$$

où $(\nabla f)_1$ est la composante du gradient dans la direction 1. Ceci nous donne $(\nabla f)_1 = (1/h_1)(\partial f / \partial q_1)$. En refaisant la même opération pour les trois coordonnées, on obtient :

$$\nabla f = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right)$$

Exemples. En coordonnées cartésiennes, nous avons $\nabla f = (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z)$. En coordonnées polaires, $\nabla f = (\partial f / \partial r, (1/r) \partial f / \partial \theta, \partial f / \partial z)$.

Problème. Donner l'expression du gradient dans les autres systèmes de coordonnées.

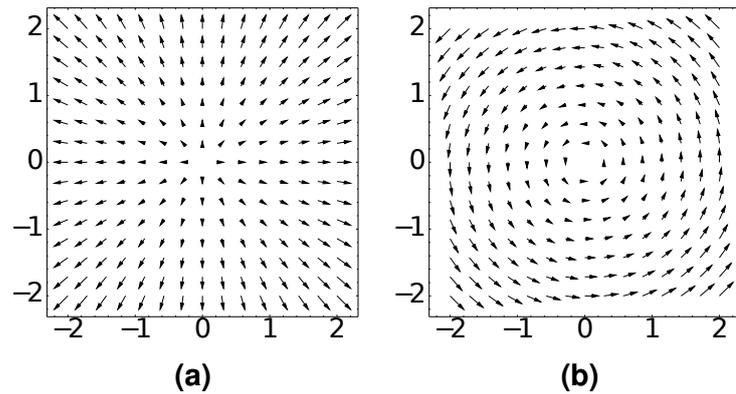


FIGURE 1.1 – Représentation des champs de vecteurs ($f_x = x, f_y = y$) et ($f_x = -y, f_y = x$). Une flèche en un point représente la valeur du vecteur \mathbf{f} en ce point.

Problème. Écrire l'expression général du gradient dans l'espace à n dimensions.

La seule connaissance du tenseur métrique nous permet de donner l'expression du gradient dans le système de coordonnées en question. Nous allons suivre la même démarche pour tous les autres opérateurs différentiels.

Notons également que la définition (1.2) donne la direction selon laquelle le champs f varie le plus rapidement. A ds fixe, c'est la direction donnée par ∇f qui donne la variation la plus importante.

Un corollaire important de cela est que le vecteur gradient est perpendiculaire aux surfaces de niveau. Une surface de niveau est l'ensemble des points sur lesquels f est constante. Si f est une fonction de n variables, $f(x_1, \dots, x_n) = Cte$ est une (hyper) surface de dimension $n - 1$. Un déplacement $d\mathbf{s}$ perpendiculaire au vecteur gradient ne change pas (à l'ordre 1 en $d\mathbf{s}$) la valeur de f ce qui implique que le gradient est perpendiculaire à la surface.

1.4 Champ de vecteurs.

Les quantités que l'on utilise en physique ne sont pas toutes scalaires comme la densité ρ ou le potentiel V . Certaines quantités comme le champs électrique \mathbf{E} ou la vitesse d'un flot \mathbf{J} sont des quantités vectorielles. Nous supposons ici connu la notion de champ de vecteur, le lecteur intéressé par plus de détails et de rigueur pourrait se reporter au cours traitant les variétés différentiables. Pour visualiser un champ de vecteur, il suffit de choisir un ensemble de points représentatifs, souvent régulièrement espacés, et de montrer par une flèche le vecteur associé à ces points.

Les lignes de champs sont faciles à imaginer. En chaque point P , la tangente à la ligne de champs est donnée par le champ en ce point. Les lignes de champs de la figure 1.1a sont des droites passant par l'origine, tandis que les lignes de champs de la figure 1.1b sont des cercles centrés sur l'origine. Le calcul des lignes de champs est élémentaire d'après ce que

1 Les opérateurs différentiels.

nous venons de dire. Supposons que nous utilisons les coordonnées (q_1, q_2, q_3) et à chaque point $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ de l'espace nous avons associé le vecteur $(f_1(\mathbf{q}), f_2(\mathbf{q}), f_3(\mathbf{q}))$. Soit une ligne de champ que nous paramétrons par la variable t . Cela veut dire que nous définissons la ligne par trois fonctions $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$. D'après ce que nous venons de dire, nous devons avoir

$$dq_i/dt = f_i \quad i = 1, 2, 3$$

ou encore, en regroupant les trois expressions,

$$\frac{dq_1}{f_1} = \frac{dq_2}{f_2} = \frac{dq_3}{f_3}$$

Nous avons écrit ces expressions pour un espace à trois dimensions, mais cela peut s'appliquer à n'importe quelle dimension.

Exemple 1. Soit, à deux dimensions, $f_1 = q_1$ et $f_2 = q_2$. Les équations des lignes de champs sont $dq_1/dt = q_1$ et $dq_2/dt = q_2$. La solution est $q_1 = \alpha q_2$, où α est une constante. Si (q_1, q_2) désigne les coordonnées cartésiennes, alors ceci est une famille de droite passant par l'origine, c'est à dire les lignes de champs de la figure 1.1a.

Exemple 2. Soit, à deux dimensions, $f_1 = 0$ et $f_2 = -q_1$. Les équations des lignes de champs sont $dq_1/dt = 0$ et $dq_2/dt = -q_1$. La solution est $q_1 = \alpha$, $q_2 = -\alpha t$ où α est une constante. Si (q_1, q_2) désigne les coordonnées polaires, alors ceci est une famille de cercles centrés sur l'origine, c'est à dire les lignes de champs de la figure 1.1b.

1.5 Le rotationnel.

La distinction entre les figure 1.1a et b saute aux yeux : dans le premier, les lignes de champs ne se referment pas sur elles mêmes, dans le deuxième, toutes les lignes se referment sur elle même. Dans le premier, les lignes de champs sont comme provenant d'une source à l'origine, dans le deuxième au contraire, aucune source ne saute au yeux à priori. C'est cela que l'opérateur rotationnel, que l'on note **rot** ou parfois $\nabla \times$ (ou **curl** dans la littérature anglo-saxonne) mesure localement. Précisons les choses.

Soit un champ \mathbf{f} . Considérons un point P et un circuit *infinitésimal* C autour de ce point. Si la projection des lignes de champ de \mathbf{f} sur C se referme, alors $I_C = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$. Le rotationnel est l'opérateur qui quantifie l'amplitude de I_C . Il y a cependant un petit détail à régler : la direction du circuit C a autant d'importance que sa taille. Soit $A\mathbf{n}$ le vecteur porteur du circuit C , A étant l'aire de la surface enclose par C et \mathbf{n} le vecteur unitaire perpendiculaire à C , alors nous définissons $\nabla \times \mathbf{f}$ telle que

$$A\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.3)$$

1 Les opérateurs différentiels.

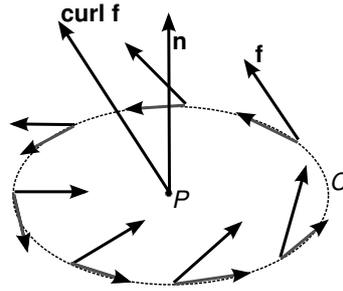


FIGURE 1.2 – Le champ \mathbf{f} , sa projection sur le circuit C entourant le point P , la normale à la surface \mathbf{n} et le rotationnel noté $\nabla \times \mathbf{f}$ ou **curl** \mathbf{f} .

à l'ordre 1 en A (voir note³). Si vous n'aimez pas le travail avec les éléments infinitésimaux (quoiqu'ils aient une existence mathématiquement légitime depuis les années 1960), vous pouvez utiliser la définition

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.4)$$

où A est la surface entourée par la courbe C .

3. Précisons quelques notions sur les approximations. Supposons que nous pouvons approximer une fonction autour d'un point x par son développement de Taylor :

$$\Delta = f(x+h) - f(x) = f'(x)h + (1/2)f''(x)h^2 + \dots$$

Quand on dit qu'à l'ordre 1 en h , Δ vaut $f'(x)h$, cela veut dire que

$$\frac{1}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \Delta = f'(x)$$

Concrètement, cela veut dire que nous nous intéressons aux très petits h (infinitésimaux) et le premier terme de l'approximation est amplement suffisant. De façon plus formelle, nous pouvons écrire

$$\Delta = f'(x)h + o(h)$$

où $o(h)$ regroupe tous les termes qui sont négligeable devant h quand $h \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{h} \lim_{h \rightarrow 0} o(h) = 0$$

Si nous avons une idée précise des termes que l'on néglige (comme c'est le cas ici) on peut écrire

$$\Delta = f'(x)h + O(h^2)$$

où $O(h^2)$ veut dire que le plus grand terme que nous avons négligé est au mieux de l'ordre de h^2 :

$$\frac{1}{h^2} \lim_{h \rightarrow 0} O(h^2) = \text{Cte} < \infty$$

Pour simplifier, par $o(h)$ il faut entendre "très petit devant h " et par $O(h)$ de l'ordre de h . Les symboles o et O sont appelés les symboles de Landau, du nom du mathématicien allemand Edmund Landau (et non du physicien soviétique Lev Landau). Ils permettent une grande rigueur et concision dans l'écriture des expressions impliquant des limites.

1 Les opérateurs différentiels.

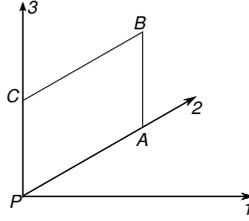


FIGURE 1.3 – un petit circuit autour du point $P = (q_2, q_3)$, où $A = (q_2 + a, q_3)$, $B = (q_2 + a, q_3 + b)$ et $C = (q_2, q_3 + b)$. Noter que le circuit est dans le plan (q_2, q_3) et perpendiculaire à l'axe q_1 .

Comme vous le savez probablement, le **rot** n'est pas un *vrai* vecteur, mais un pseudo-vecteur. En faite, on ne peut donner un sens vectoriel au rotationnel que dans l'espace à trois dimensions. Nous verrons le sens général du rotationnel dans le chapitre consacré soit aux tenseurs, soit aux formes différentielles. Nous continuerons de les traiter classiquement dans ce qui suit.

Une fois que nous avons défini le rotationnel de façon (eq.1.3), nous pouvons nous en servir pour l'écrire dans n'importe quel système de coordonnées. Soit le système (q_1, q_2, q_3) et le champs $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ défini dans ces coordonnées : $f_i = f_i(q_1, q_2, q_3)$. Considérons un petit circuit autour du point P , dans le plan (q_2, q_3) .

Sur la partie PA , notre intégrale vaut (nous omettons d'écrire la variable q_1 qui ne varie pas), à l'ordre 1 en a

$$f_2(q_2, q_3)h_2(q_2, q_3)a \quad (1.5)$$

et sur la partie BC

$$-f_2(q_2, q_3 + b)h_2(q_2, q_3 + b)a$$

et la somme de ces deux parties nous donne

$$-\frac{\partial}{\partial q_3} [h_2 f_2] ab$$

Par le même mécanisme, l'intégration sur la partie AB et CP nous donne

$$\frac{\partial}{\partial q_2} [h_3 f_3] ab$$

La partie gauche de l'eq.(1.3) est par ailleurs, à l'ordre le plus bas en a, b : $h_2 h_3 ab (\mathbf{rot} \mathbf{f})_1$, ce qui nous donne, enfin,

$$(\mathbf{rot} \mathbf{f})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_3 f_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(h_2 f_2)}{\partial q_3} \right] \quad (1.6)$$

Les autres composantes se trouvent facilement par une permutation circulaire de $(1, 2, 3)$.

Exemple. En coordonnées polaire (r, θ, z) , $h_1 = h_3 = 1$, $h_2 = r$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}(\mathbf{rot} \mathbf{f})_r &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial f_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(r f_\theta)}{\partial z} \right] \\(\mathbf{rot} \mathbf{f})_\theta &= \left[\frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r} \right] \\(\mathbf{rot} \mathbf{f})_z &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r f_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial \theta} \right]\end{aligned}$$

Problème. Donnez l'expression du rotationnel en coordonnées sphérique et parabolique.

Généralisation. Quand on se trouve dans l'espace à trois dimensions, nous pouvons caractériser une surface plane par le vecteur orthogonal à celle-ci. Dans le cas général, ceci n'est pas possible et il faut indexer les composants du rotationnel par deux indices désignant le plan qui contient le circuit sur lequel nous avons effectué l'intégral. Ainsi, nous aurions dû noter l'expression (1.6) en réalité

$$(\mathbf{rot} \mathbf{f})_{2,3} = \dots$$

où l'indice $(2, 3)$ implique que le circuit C se trouvait dans le plan x_2, x_3 . A quatre dimensions par exemple, le rotationnel contient 6 composantes (et $n(n-1)/2$ à n dimensions). Dans l'espace-temps par exemple, le rotationnel d'un vecteur qu'on appelle "potentiel vecteur" possède 6 composantes : les trois où les circuits contenaient une dimension temporelle sont appelés "champ magnétique" et les trois qui ne contiennent que des dimensions spatiales sont appelé "champ électrique".⁴

1.6 La divergence.

Le travail d'un comptable est de faire le bilan des sommes dépensées et gagnées par son entreprise. C'est exactement ce travail qu'effectue l'opérateur divergence. Considérons une surface infinitésimal fermée σ autour du point P : quel est le bilan du flux d'un champs \mathbf{f} à travers cette surface ? C'est ce bilan que la divergence quantifie. Plus exactement,

$$dV \mathbf{div} \mathbf{f} = \int_{\sigma} \mathbf{f} d\sigma$$

La démarche pour calculer la divergence est similaire à ce que nous avons fait pour le rotationnel. Considérons le flux (sortant) à travers la surface $ABCD$ (les normales aux surfaces sont par convention orientées *sortant*) :

$$bch_2(q_1 + a, q_2, q_3)h_3(q_1 + a, q_2, q_3)f_1(q_1 + a, q_2, q_3)$$

4. Le rotationnel dans ce cas est appelé "tenseur électromagnétique". Nous référons le lecteur à un livre avancé en électromagnétisme pour voir cela en détail.

1 Les opérateurs différentiels.

et le flux (entrant) à travers la surface $PB'C'D'$

$$-bch_2(q_1, q_2, q_3)h_3(q_1, q_2, q_3)f_1(q_1, q_2, q_3)$$

Le bilan de ces deux termes nous donne

$$\frac{\partial(h_2h_3f_1)}{\partial q_1}abc$$

En considérant le flux à travers les quatre autres surfaces, et en notant que $dV = h_1h_2h_3abc$, on obtient finalement

$$\mathbf{div} \mathbf{f} = \frac{1}{h_1h_2h_3} \left(\frac{\partial(h_2h_3f_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(h_3h_1f_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(h_1h_2f_3)}{\partial q_3} \right)$$

Exemple. En coordonnées polaire (r, θ, z) , $h_1 = h_3 = 1$, $h_2 = r$. Nous avons donc

$$\mathbf{div} \mathbf{f} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rf_r)}{\partial r} + \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(rf_z)}{\partial z} \right)$$

Noter que comme $\partial_z(rf_z) = r\partial_z f_z$, l'expression ci-dessus peut encore se simplifier quelques peu.

Problème. Donnez l'expression de la divergence en coordonnées sphérique et parabolique.

Problème. Comment pourrait on généraliser la divergence pour les espaces à n dimensions ?

Prenons le cas d'un fluide de densité ρ et de champs de vitesse \mathbf{v} . La densité de courant (le débit de la masse) vaut en chaque point $\rho\mathbf{v}$. Si le fluide est incompressible (pensez à l'eau), alors $\mathbf{div}\rho\mathbf{v} = 0$. Si au contraire le fluide est compressible, la différence entre le flux entrant et sortant dans un petit volume provoque une accumulation de la masse en ce point, d'où le sens de l'équation

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{div}\rho\mathbf{v} = 0$$

Ceci est également le sens des équations de Maxwell en électromagnétisme, sauf que là, on ne considère pas le flux d'un vecteur mais d'un objet un peu plus complexe qu'on appelle le tenseur électromagnétique.

1.7 Le Laplacien.

Le laplacien d'un champ scalaire est défini en terme des autres opérateurs que nous venons de voir :

$$\Delta f = \mathbf{div}(\mathbf{grad} f)$$

et d'après ce que nous avons dit, s'exprime simplement en coordonnées curviligne comme

$$\Delta f = \frac{1}{h_1h_2h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right]$$

1 Les opérateurs différentiels.

Exemple. En coordonnées polaire (r, θ, z) , $h_1 = h_3 = 1$, $h_2 = r$. Nous avons donc

$$\Delta f = \frac{1}{r} [\partial_r(r\partial_r f) + (1/r)\partial_\theta^2 f + r\partial_z^2 f]$$

qui prend une forme plus simple si l'on fait entrer le facteur $(1/r)$ à l'intérieur du $[\]$.

La signification du laplacien est l'écart à la moyenne. En un point P , le laplacien mesure de combien le champ scalaire f est différent de la moyenne du champ pris sur les points voisins. Voyons cela de plus près. Prenons d'abord le cas à une dimension et supposons que nous utilisons les coordonnées cartésiennes. Autour du point P d'indice x_0 , choisissons deux points distants de h et calculons l'écart à la moyenne d'une fonction f :

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2} (f(x_0 + h) + f(x_0 - h)) - f(x_0) \\ &= \frac{1}{2} (f(x_0 + h) - f(x_0)) + \frac{1}{2} (f(x_0 - h) - f(x_0)) \\ &= \frac{1}{2} f''(x_0) h^2 + O(h^3) \end{aligned}$$

donc, à un facteur $1/2$ près (qui dépend de la dimension de l'espace), l'écart à la moyenne est donnée par la dérivée seconde *multipliée* par la distance des points de voisinage au carré h^2 . La généralisation est immédiate. Donnons nous un point P_0 et une sphère de rayon h petit autour de ce point. Calculons la moyenne de l'écart entre la valeur de la fonction au point P de la sphère et le point P_0 . Le point P est repéré par le vecteur $h\mathbf{n}$, c'est à dire que $P = P_0 + h\mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\Sigma} \iint_{\Sigma} (f(P) - f(P_0)) d\Sigma \\ &= \frac{1}{\Sigma} \iint_{\Sigma} (\mathbf{grad} f) h \mathbf{n} d\Sigma \\ &= \frac{h}{\Sigma} \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{grad} f) dV \\ &= \frac{hV}{\Sigma} \operatorname{div}(\mathbf{grad} f) + O(h^3) \end{aligned}$$

La quantité $V/\Sigma = Ch$, où C est un facteur géométrique. A trois dimensions⁵ par exemple, $C=1/3$. Nous retrouvons donc bien la signification du laplacien de la moyenne.

Par exemple, l'équation de la vibration d'une membrane élastique, dont la hauteur u est relevée en chaque point est

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \Delta u$$

En terme de mécanique du point, l'équation ci-dessus est juste la formule $m\gamma = F$: le terme de gauche est l'accélération verticale ; le terme de droite, l'écart à la moyenne de chaque point par rapport à ses voisins, est la force exercée sur ce point.

5. De façon générale, $V/S = r/d$, où d est la dimension de l'espace et r le rayon de la sphère.

1 Les opérateurs différentiels.

TABLE 1.1 – Les opérateurs différentiels en coordonnées curviligne. Pour les opérateurs vectoriels, seul la composante selon q_1 est donnée, les autres se déduisent par permutation circulaire (1, 2, 3).

Expression	application
$(\mathbf{grad} f)_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1}$	$f(b) - f(a) = \int_C \nabla f \cdot ds$
$(\mathbf{rot} \mathbf{f})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_3 f_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(h_2 f_2)}{\partial q_3} \right]$	$\int_C \mathbf{f} \cdot ds = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{n}$
$\mathbf{div} \mathbf{f} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial(h_2 h_3 f_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(h_3 h_1 f_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 f_3)}{\partial q_3} \right)$	$\int_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{n} = \int_V \mathbf{div} \mathbf{f} dV$
$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \dots \right]$	

Une des équations très importante de la physique (électrostatique sans charge) est celle de Laplace (d'où le nom de laplacien)

$$\Delta V = 0$$

Cela veut dire qu'en tout point x , la fonction $V(x)$ est égale à la moyenne de son voisinage. Ceci veut dire que soit la fonction est localement linéaire autour du point P , soit que les variations le long d'une direction sont compensées par des variations en sens inverse dans d'autres dimension. Prenez par exemple l'image d'un col en montagne : dans une direction, on monte, dans l'autre direction, on descend. Cela implique donc qu'une fonction obéissant à cette équation ne peut pas avoir d'extrémum local nul part à l'intérieur du domaine où cette équation est valable.

1.8 Résumons.

Il est temps de mettre toutes ces expression côte à côte et voir leur ressemblance. Remarquez, dans la colonne des applications de la table (1.1), la relation entre la partie droite et gauche de chaque égalité. Dans la partie gauche, nous somme entrain de calculer quelque chose comme le *flux* d'un champ sur une courbe de 0, 1, 2 dimensions. Dans la partie droite, nous relient ce flux à l'intégrale d'un opérateur différentiel de ce champ sur une surface de 1,2,3 dimensions qui entoure la courbe précédente. Les trois relations s'appellent formule de Stokes généralisée.

Remarquez que les relations de Stokes s'obtiennent directement à partir des définitions. Prenons l'exemple du gradient, et donnons nous un circuit C commençant par le point A et finissant par le point B . Découpons ce circuit en N intervalles (bien sûr, nous pensons à N très grand, $\rightarrow +\infty$). Sur chaque intervalle, nous pouvons écrire, à l'ordre 1 en l'inverse de longueur des intervalles, et en utilisant la définition du gradient :

1 Les opérateurs différentiels.



FIGURE 1.4 – Découpage d'un circuit en N intervalles

$$\begin{aligned} f(P_1) - f(A) &= \nabla f|_A \cdot d\mathbf{s}_1 \\ f(P_2) - f(P_1) &= \nabla f|_{P_1} \cdot d\mathbf{s}_2 \\ &\dots \\ f(B) - f(P_{N-1}) &= \nabla f|_{P_{N-1}} \cdot d\mathbf{s}_N \end{aligned}$$

En sommant les deux côtés de ces égalités et en prenant la limite $N \rightarrow \infty$, nous obtenons la relation de Stokes pour le gradient. La relation de Stokes pour les deux autres opérateurs s'obtient de façon similaire.

Nous reviendrons beaucoup plus tard sur ces notions en leur donnant le caractère général qui leur sied d'abord à travers le cours sur les formes différentielles et ensuite quand nous aborderons le calcul tensoriel et les variétés différentielles. Les formes différentielles sont plus élégantes, mais les physiciens sont plus habitués au calcul tensoriel. Les deux approches sont très complémentaires, des perspectives différentes de la même chose. Notons simplement qu'avec les formes différentielles, les relations de Stokes se notent, de façon très générale,

$$\int_{d\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega$$

où $d\Sigma$ est l'hyper surface qui entoure l'hyper volume Σ , est $d\omega$ est la dérivée extérieure de ω .

1.9 Problèmes.

1. Démontrer les relations suivantes et surtout, donner leur un sens géométrique en vous inspirant des définitions

1. $\mathbf{rot}(\mathbf{grad} f) = 0$ (Help : considérer des circuits infinitésimaux sur des surfaces de niveau entourant un point P).
2. $\mathbf{div}(\mathbf{rot} \mathbf{f}) = 0$
3. $\mathbf{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -(\mathbf{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{rot} \mathbf{B})$

2. En utilisant les relations locales, démontrez les formules de Stokes du tableau 1.1.

1 Les opérateurs différentiels.

3. Nous avons défini le Laplacien d'un champ scalaire. Le Laplacien d'un champ vectoriel est défini par

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{grad}(\mathbf{div} \mathbf{f}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{f})$$

Exprimez le Laplacien dans les différents systèmes de coordonnées. Pouvez vous en donner un sens géométrique ?

4. Démontrer les relations de Stokes pour le rotationnel et la divergence.

1.10 Notes.

Certaines manipulations impliquant les dq_i peuvent paraître approximatives et sans la rigueur nécessaire. Il n'en est rien. Reprenons par exemple le calcul du rotationnel avec autant de précision que souhaitable.

Quelques points à éclaircir d'avance. Si nous connaissons la fonction (très lisse, infiniment dérivable) f et ses dérivées au point $\mathbf{q} = (q_i^0)$, alors nous pouvons connaître sa valeur en un point proche, par exemple $(q_1^0 + dq_1, q_2^0, q_3^0)$:

$$f(q_1^0 + dq_1, q_2, q_3) = f(\mathbf{q}) + dq_1 \partial_1 f(\mathbf{q}) + (1/2) dq_1^2 \partial_1^2 f(\mathbf{q}) + \dots$$

C'est ce que nous appelons le développement de Taylor. Maintenant, si nous connaissons la fonction f et ses dérivées au point $\mathbf{q} = (q_i^0)$, alors comment évaluer

$$\int_{q_1^0}^{q_1^0+a} f(q_1, q_2, q_3) dq_1$$

Rien de plus simple à partir du développement de Taylor. Dans l'intervalle d'intégration, nous choisissons le paramétrage $q_1 = q_1^0 + u$

$$\begin{aligned} \int_{q_1^0}^{q_1^0+a} f(q_1, q_2, q_3) dq_1 &= \int_0^a f(q_1^0 + u, q_2, q_3) du \\ &= \int_0^a [f(\mathbf{q}^0) + u \partial_1 f(\mathbf{q}^0) + (1/2) u^2 \partial_1^2 f(\mathbf{q}^0) + \dots] \\ &= a f(\mathbf{q}^0) + (1/2) a^2 \partial_1 f(\mathbf{q}^0) + (1/6) a^3 \partial_1^2 f(\mathbf{q}^0) + \dots \end{aligned}$$

La dernière ligne a été possible parce que les quantités $f(\mathbf{q})$, $\partial_1 f(\mathbf{q})$, ... sont juste des constantes pour l'intégrale en question : l'intégration se fait sur u ! Dans l'équation 1.5, nous avons simplement écrit le premier ordre, le seul qui est pertinent quand on prend la limite $a, b \rightarrow 0$. Pour vous en persuader, il suffit de faire le calcul à l'ordre supérieur.