1 Les distributions.

1.1 Ce qu'il faut savoir.

Les transformées de Fourier nous posent quelques problèmes quant à la définition d'une base orthogonale. Nous avons vu que, sur l'intervalle $]-\infty,+\infty[$, la fonction $f(x)$ peut être représentée comme la superposition des fonctions $\exp(iqx)$ avec le poids $\tilde{f}(q)$. Pour en revenir à notre image de base dans l'espace des fonction, les fonctions $e^{iq(.)}$ $(q \in \mathbb{R})$ forment une base, et les coefficients $\tilde{f}(q)$ sont les projections du vecteur $f(.)$ sur les vecteurs de cette base.

Nous avions aux sections précédentes basé nos démonstrations sur le concept d'orthogonalité. Mais peut on dire que $\exp(iq_1x)$ et $\exp(iq_2x)$ sont orthogonales ? Le produit scalaire a t' il encore un sens ? En effet, comment définir la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iq_1x)\exp(-iq_2x)dx \tag{1.1}$$

qui au sens normal de la théorie d'intégration, n'a aucun sens ?

Il faut comprendre Le produit scalaire (1.1) dans le sens suivant d'un passage à la limite :

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} \exp(iq_1x)\exp(-iq_2x)dx \tag{1.2}$$

Quand $q_1 \neq q_2$, l'intégrale est au plus de l'ordre de 1 et le $(1/L)$ fait tout tendre vers zéro. Par contre, si $q_1 = q_2$, l'intégrale vaut L et l'expression (1.2) vaut 1. Le produit scalaire (1.1) est donc de l'ordre de L (avec $L \to \infty$) pour $q_1 = q_2$ et de l'ordre de 1 sinon. Nous noterons ce genre d'objet $\delta(q_1 - q_2)$ et nous l'appellerons le *delta* de Dirac, du nom du physicien qui a établi les règles de manipulation de ces objets dans son livre sur la mécanique quantique en 1930.

Pour un physicien, le concept de la *fonction* δ est très intuitif et généralise le concept de charge ou de masse ponctuel. Supposez que vous ayez des charges répartit continuellement dans l'espace avec une densité $\rho(\mathbf{x})$ et que vous voulez calculer la charge totale contenue dans une sphère de rayon R autour d'un point. Rien de plus simple,il suffit d'intégrer la densité autour $C = \int_V \rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}$. Supposez maintenant que $R \to 0$, c'est à dire que vous prenez des sphères de plus en plus petite autour de votre point. Il est évident qu'il y aura de moins en mois de charge à l'intérieur et que $C \to 0$. C'est vrai, sauf si vous avez placé une charge *ponctuelle* au point considéré. Pour une charge ponctuelle Q, quel que soit la taille de la sphère autour, la quantité totale de la charge à l'intérieur reste constante. En gros, pour une charge ponctuelle placée en $\mathbf{x}_0$, la densité de charge est *nulle* partout, sauf en $\mathbf{x}_0$ où elle est infinie ! Ce genre de densité infinie en un point, nulle partout et dont l'intégrale est *finie* est justement un "delta" de Dirac. Les mathématiciens nous exécuteraient si on appelait ces objets des fonctions et nous obligent à les nommer des *distributions*. La propriété du delta de Dirac est la suivante :

$$\int_I \delta(x)dx = 1 \qquad \forall I \ni 0 \tag{1.3}$$

Du moment que l'intervalle I contient 0, l'intégrale vaut 1, sinon elle *vaut* zéro. L'objet de ce chapitre est de se familiariser avec les distributions, et en particulier avec la distribution de Dirac.

On peut voir $\delta(x)$ comme un processus de limite. Prenons le cas de la fonction

$$f_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-(x/a)^2}$$

C'est une gaussienne centrée sur 0, et son intégrale vaut 1. Quand $a \to 0$, elle devient de plus en plus piquée, avec une extension de moins en moins large, mais l'intégrale reste constante. On peut dire la même chose de la fonction $g_a(x) = (1/2a)\Pi(x/a)$ ou en fait de n'importe quelle fonction qui, lors d'un processus de passage à la limite, réduit son extension, augmente l'amplitude de son pique, et garde son intégrale constante. La distribution $\delta(x)$ est la limite de ce genre de fonction.

La définition (1.3) nous permet quelques généralisations. Par exemple, on peut définir $3\delta(x)$, la distribution dont l'intégrale vaut 3 sur des intervalles contenant 0. On peut même définir $f(x)\delta(x)$ où on suppose $f(x)$ continue en 0. L'intégrale vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f(x)\delta(x) = f(0)$$

Vous pouvez démontrer cela facilement en utilisant la définition de la continuité d'une fonction. Mais intuitivement, cela paraît évident : comme $\delta(x)$ est nulle partout sauf en 0, le multiplier par $f(x)$ revient simplement à le multiplier par $f(0)$. En fait, on utilise cela comme la définition de la distribution $\delta(x)$:

$$\int_I f(x)\delta(x)dx = f(0) \qquad \forall I \ni 0 \tag{1.4}$$

$\delta(x)$ est une distribution centrée sur 0. $\delta(x - x_0)$ est une distribution centrée sur x_0 et $\int \delta(x-x_0)f(x) = f(x_0)$. Finalement, les règles pour manipuler les δ ne sont pas vraiment compliquées.

Une dernière chose à savoir sur $\delta(x)$ est sa transformée de Fourier (on pose dorénavant $R =]-\infty, +\infty[$:

$$\tilde{\delta}(q) = \int_R \delta(x)\exp(-iqx)dx = 1$$

La TF de $\delta(x)$est la fonction constante 1. Cela veut dire que $\delta(x)$ est la superposition, à poids égal, de toutes les modulations $\exp(iqx)$! Cela n'est pas vraiment étonnant : comme $\delta(x)$ varie vraiment très rapidement, toutes les modulations doivent y être présent. Inversement,

$$\frac{1}{2\pi}\int_R \exp(iqx)dq = \delta(x) \tag{1.5}$$

Exercice : Démontrer que la fonction δ *définie* par (1.5) est bien une δ de Dirac, c'est à dire que $\int_R \delta(x) f(x) = f(0)$.

La dimension de la distribution δ. En mathématique, nous manipulons essentiellement des chiffres, c'est à dire des nombre sans dimensions. En physique cependant, les quantités que nous manipulons représentent des grandeurs telles que des longueurs, énergies, temps, vitesses, etc. Ces grandeurs ont des dimensions. Les physiciens attachent beaucoup d'importance à cette question pour plusieurs raisons. Une de ces raisons est purement gramaticale et permet de vérifier la cohérence des divers étapes d'un calcul. Prenons le cas d'une équation différentielle du genre $d^2y/dt^2 + \omega_0^2 y = f_0$ et supposons que nous avons trouvé $y = f_0 \sin(\omega_0 t)$. Si y représente une quantité de dimension $[y]$, alors $[\omega_0] = T^{-1}$ et $[f_0] = [y]T^{-2}$. Ceci est nécessaire si nous voulons que les deux cotés de l'équation aient la même dimension. La dimension du côté gauche de la solution est $[y]$. Comme la fonction sin n'a pas de dimension, le coté droit de la solution a la dimension de $[y]T^{-2}$! Les deux cotés de la solution n'ont pas la même dimension et nous nous sommes manifestement trompé à une étape de la résolution. Ces vérifications peuvent (et doivent) être effectuées à chaque étape du calcul.

Comme nous manipulerons pas mal les distributions par la suite, nous avons besoin de connaître leurs dimensions. Les fonctions $\sin(x)$ et $\exp(x)$ n'ont pas de dimensions. Qu'en est-il de la distribution $\delta(x)$? Pour cela, il faut d'abord répondre à la question de la dimension de $\int ydx$. Le signe $\int$ n'est qu'une généralisation de l'opération addition. La dimension d' "une pomme + une pomme" est toujours "une pomme". Le signe d signifie "une très petite quantité de" et la dimension d'une "très petite quantité de pomme" est toujours "une pomme". Nous en déduisons de tout cela que $[\int ydx] = [y][x]$

Nous pouvons maintenant utiliser la propriété de la distribution δ : $\int \delta(x) f(x) dx = f(0)$. Il est alors aisé de voir que $[\delta(x)] = [x]^{-1}$! Nous aurions pu bien sûr arriver au même résultat en utilisant l'expression par passage à la limite $\delta(x) = (1/a)\exp(-x^2/a^2)$ quand $a \to 0$. Voilà, il faut avoir cela en tête à chaque fois que l'on veut vérifier la cohérence des équations qui impliquent des δ.

1.2 Un peu de décence.

Du point de vue du mathématicien, ce que nous avons raconté plus haut est, en restant poli, mal propre. Laurent Schwarz, dans les années 1950, a rendu rigoureux la théorie des distributions. Il est utile de connaître les grandes lignes de sa construction. Il est parti de la constatation que les distributions ne sont utilisées en pratique que sous le signe intégral, comme en (1.4).

Une fonctionnelle est une généralisation d'une fonction. Elle prend *une fonction* en entrée et produit *un scalaire* en sortie. C'est une fonction de fonction en quelque sorte. Notons que la TF *n'est pas* une fonctionnelle, puisqu'elle produit une fonction en sortie.

Appelons $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions [1], et $\mathcal{F}$ l'espace des fonctionnelles *linéaires* (ou dit

1. En réalité, l'espace des fonctions à support borné et infiniment dérivable, mais nous ne sommes pas à notre premier délit.

plus sérieusement, des formes linéaires définies sur $\mathcal{E}$). Un exemple de fonctionnelle est $\mathcal{L}_{\exp(-x^2)}$ qui prend une fonction en entrée, calcul son produit scalaire avec la fonction $\exp(-x^2)$, et produit ce chiffre en sortie :

$$\mathcal{L}_{\exp(-x^2)}[f] = \int_R \exp(-x^2) f(x) dx$$

Nous pouvons généraliser cet exemple : à chaque fonction $g \in \mathcal{E}$, nous pouvons associer une fonctionnelle $\mathcal{L}_g \in \mathcal{F}$ tel que

$$\mathcal{L}_g[f] = \int_R f(x) g(x) dx$$

Et nous pouvons démontrer facilement que ce $\mathcal{L}_g$ est bien une fonctionnelle linéaire. Nous pouvons trouver beaucoup d'autres fonctionnelles linéaires. Par exemple, la fonctionnelle δ_{x_0} est définie par

$$\delta_{x_0}[f] = f(x_0)$$

Voilà, le tour est joué. Cette fonctionnelle est bien le delta de Dirac $\delta(x - x_0)$ définie plus haut. Noter bien l'opération : on peut identifier une partie de l'espace $\mathcal{F}$ avec l'espace $\mathcal{E}$ via ces $\mathcal{L}_g$ que nous avions construit : à chaque élément de $\mathcal{E}$ nous pouvons faire correspondre un élément de l'espace $\mathcal{F}$. Mais l'espace $\mathcal{F}$ est plus vaste, et quelques uns de ses éléments supplémentaires constituent les distributions inhabituelles. C'est un peu comme enrichir l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ pour arriver à l'ensemble des nombres réel $\mathbb{R}$.

On peut définir des opérations sur les distributions. Il est toujours plus simple de partir des distributions du genre $\mathcal{L}_g$ dont le sens est familier pour définir ensuite les mêmes opérations sur les distributions du genre δ. Par exemple, que veut dire $\mathcal{L}_{g'}$? En intégrant par partie, on trouve

$$\mathcal{L}_{g'}[f] = \int_R g'(x) f(x) dx = -\int_R g(x) f'(x) dx = -\mathcal{L}_g[f']$$

(N'oublions pas que comme f et g sont au moins sommable, elle tendent vers zéro pour $x \to \infty$). On peut donc définir :

$$\delta'_{x_0}[f] = -\delta_{x_0}[f'] = -f'(x_0)$$

ou dans le langage moins élégants des physiciens,

$$\int \delta^{'}(x - x_0) f(x) dx = -f'(x_0)$$

De même, nous pouvons démontrer que pour la fonction d'Heaviside $H(x)$, $H'(x) = \delta(x)$. Nous ne continuerons pas plus le développement formel des distributions. Mais la constructions de Schwarz est extrêmement élégante et nous conseillons au lecteur de voir au moins une fois les bases rigoureuses de cette construction.

Nous voyons cependant que l'espace plus large des distributions nous permet de manipuler aisement des objets qui nous semblaient interdit. Une force ponctuelle a un sens.

Une discontinuité également. En physique, une fonction ne *peut* pas être discontinue. La densité de l'eau ne saute pas de ρ_l à ρ_v à l'interface liquide–solide, il existe une couche d'épaisseur petite (très petite devant les autres échelle de longueur) où la densité varie continuellement d'une valeur à une autre. La lumière réfléchit par un miroir pénètre sur une petite longueur *dans* le miroir où son intensité décroît exponentiellement et ainsi de suite. Nous pouvons donc caractériser les discontinuité des fonctions par des distributions. Soit la fonction $f(x) = g(x) + \Delta H(x - x_0)$, où la fonction g est une fonction continue et dérivable en x_0. La fonction f par contre, saute de la valeur $g(x_0)$ à x_0^- à $\Delta + g(x_0)$ à x_0^+. Au sens des distributions, la dérivé de f est donnée par $f'(x) = g'(x) + \delta(x - x_0)$. Imaginez donc f' comme une fonction normale, avec une flèche positionnée en x_0.

Exercices.

1. En utilisant la définition (1.4), démontrer que l'expression (1.1) égale $\delta(q_1 - q_2)$.
2. Que valent $\delta'(x)$ et $\int \delta(x)$?
3. Soit une fonction $L-$périodique f. Que vaut sa TF (au sens des distributions) ?
4. Une peigne de Dirac est défini par $\Xi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n)$. C'est comme si nous avions posé un delta de Dirac sur chaque nombre entier. Quelle est la TF de $\Xi(x/a)$?
5. Démontrer que $\delta(x + a) = \delta(x) + a\delta'(x) + (1/2)a^2\delta''(x) + ...$ On peut faire un développement de Taylor des δ comme pour les fonctions usuelles. Pour pouvoir démontrer cette égalité, appliquer les deux côtés de l'égalité à une fonction f
6. Démontrer que $\delta(-x) = \delta(x)$ et $\delta(ax) = (1/|a|)\delta(x)$.
7. Considérons une fonction $g(x)$ avec un zéro simple en x_0 : $g(x_0) = 0$, $g'(x_0) \neq 0$. Prenons un intervalle $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ autour de x_0(on peut supposer a aussi petit que l'on veut). En développant g autour de sa racine à l'ordre 1, démontrez que
$$\int_I \delta(g(x))f(x)dx = \frac{1}{|g'(x_0)|}f(x_0)$$
8. En supposant que la fonction $g(x)$ n'a que des racines simples, et en utilisant le résultat ci-dessus, démontrer :
$$\delta\left(g(x)\right) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x - x_i)$$
où les x_i sont les racines simples de $g(x)$. Donner l'expression de $\delta(x^2 - a^2)$.
9. En vous inspirant du résultat de la question 5, pouvez-vous indiquer pourquoi dans la question 7, nous pouvions nous restreindre à un développement d'ordre 1 ?

1.3 Manipulation et utilisation des distributions.

Oscillateur soumis à une force périodique. Il obéit à l'équation $d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x = A\exp(i\omega_1 t)$. En prenant la TF des deux côtés, nous avons :
$$\tilde{x}(\omega) = \frac{2\pi A\delta(\omega - \omega_1)}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

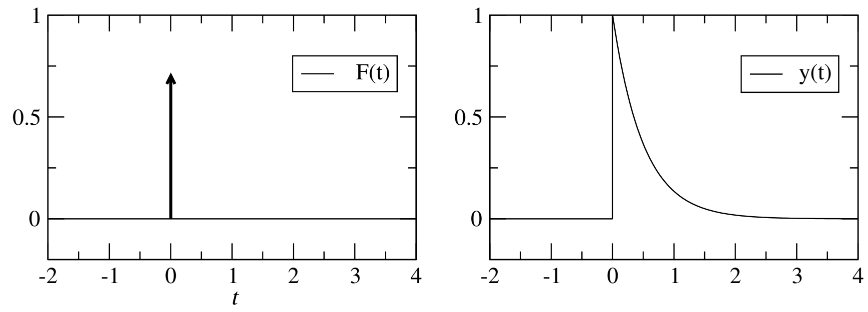

FIGURE 1.1 – Reponse d'un oscillateur amortie à une force impulsionnelle. La distribution δ est représentée par une flèche verticale.

comme $x(t) = (1/2\pi)\int \tilde{x}(\omega)\exp(i\omega t)d\omega$, nous trouvons

$$x(t) = \frac{A\exp(i\omega_1 t)}{\omega_0^2 - \omega_1^2}$$

Nous connaissions ce résultat depuis l'exercice sur le filtrage.

Oscillateur amorti soumis à une force impulsionnelle. Un oscillateur amorti soumis à une force $F(t)$ obéit à l'équation

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{dy}{dt} + ky = F(t)$$

Nous souhaitons connaître la réponse de l'oscillateur à une force impulsionnelle $F(t) = F_0\delta(t)$. Ceci est l'idéalisation d'un coup de marteau très bref et très puissant sur l'oscillateur. Pour simplifier le problème, nous supposons dans un premier temps que la masse est négligeable (que les forces d'inertie sont petites devant les forces de frottement) et que l'oscillateur est au repos. En renormalisant nos coefficients, l'équation prend la forme :

$$\frac{dy}{dt} + \nu y = f_0\delta(t) \tag{1.6}$$

et en prenant la TF des deux cotés, nous trouvons que $\tilde{y}(\omega) = f_0/(\nu + i\omega)$. Il suffit maintenant de prendre la TF inverse. Il se trouve que dans ce cas, si l'on se souvient de l'exercice (†**??** :**??**), nous pouvons directement écrire

$$y(t) = f_0 H(t)\exp(-\nu t) \tag{1.7}$$

Ce résultat est représenté sur la figure (1.1). Nous suggérons au lecteur de discuter les limites $\lambda \to 0$ et $\lambda \to \infty$.

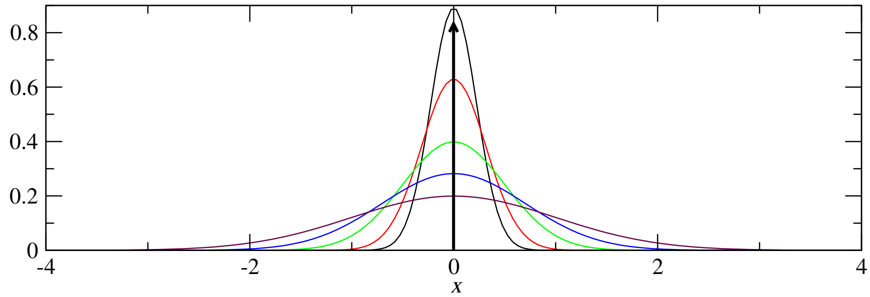

FIGURE 1.2 – profil de concentration en fonction de x, à différent temps $t = 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2$. Ici, $D = 1/4$. La distribution originale, en $\delta(x)$, est représenté par une flèche verticale.

Équation de la chaleur avec une source ponctuelle. Une goutte d'encre extrêmement concentrée, déposée en un point de l'espace va se diluer par diffusion. La même chose est valable pour un pulse ponctuel de chaleur. Comme nous l'avons vu précédemment, les phénomènes de diffusion sont gouvernés par l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t)$$

où u désigne la température ou la concentration et Q est un terme de source. Dans le problème qui nous intéresse ici, $Q(x,t) = Q_0\delta(x)\delta(t)$. En prenant la TF par rapport à la variable d'espace x, nous avons :

$$\partial_t \tilde{u}(q,t) + Dq^2\tilde{u}(q,t) = Q_0\delta(t) \qquad (1.8)$$

Mais cette équation est exactement eq.(1.6), celle qu'on a écrit pour l'oscillateur amorti. C'est bien une équation différentielle *ordinaire* par rapport à la variable temps, et q peut être considérée comme une constante : Pour chaque mode q, nous avons une EDO indépendante. La solution est donc analogue à (1.7), et s'écrit :

$$\tilde{u}(q,t) = Q_0 H(t)\exp(-Dq^2 t)$$

Il nous suffit maintenant de prendre la TF inverse pour obtenir la solution dans l'espace direct :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{u}(q,t).e^{iqx}dq \\ &= \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \end{aligned}$$

La dernière intégrale s'obtient facilement par les techniques que nous avons déjà utilisé. L'évolution de $u(x)$ pour différente valeur de t est représentée sur la figure (1.2).

Extension (difficile) : si la source n'est pas ponctuelle dans le temps, mais seulement dans l'espace, *i.e.* $Q(x) = Q_0\delta(x)$, quel est le comportement de la solution ? Help : Essayez comme avant d'obtenir une expression pour $\tilde{u}(q,t)$. Cette expression est trop compliquée pour inverser, mais $\partial_t\tilde{u}(q,t)$ l'est beaucoup moins. En changeant alors l'ordre des opération TF^{-1} et ∂_t, vous pouvez obtenir une expression pour $\partial_t u(x,t)$. Il vous suffit alors d'évaluer

$$u(x,\tau) = \int_0^\tau \partial_t u(x,t)dt$$

Il n'est pas difficile alors d'obtenir le comportement asymptotique de u pour $t \to \infty$.

Équation d'onde avec source ponctuelle. Considérons une corde tendue infinie et au repos à l'instant initial. A l'instant $t = 0$, on la soumet à une force ponctuelle dans le temps et dans l'espace (l'idéalisation d'un marteau de piano tapant sur la corde). l'équation d'onde s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma\delta(x)\delta(t)$$

En suivant la même démarche que ci-dessus, on peut obtenir la propagation de l'onde. on peut également montrer que l'extension du domaine ou $u \neq 0$ croit à la vitesse v.

Vitesse de phase, vitesse de groupe. Donnons nous un signal $u(x,t)$ qui se propage (Fig.1.3). Comment devrait on définir la vitesse du signal ? On pourrait par exemple repérer le maximum de u et suivre ce point en fonction de temps ; ceci n'est pas très bon cependant, puisque le signal peut se déformer et notre maximum disparaître ou d'autres maxima apparaître. Nous devons définir la vitesse en prenant en compte l'ensemble du signal. Une bonne définition est par exemple de suivre le barycentre du signal, ou même mieux, le barycentre du carré du signal pour éviter les compensations de signe :

$$\bar{x}(t) = \int_I xu^2(x,t)dx$$

Notons que dans la plupart des exemples physique, le *carré* du signal est relié au concept de l'énergie. Par la suite, sans perte de généralité, nous supposons notre signal normé : $\int_I u^2(x,t)dx = 1$. Supposons par exemple que notre signal se propage sans se déformer $u(x,t) = u_0(x - ct)$ et nous avons alors

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \int_I xu_0^2(x)dx + ct\int_I u_0^2(x)dx \\ &= \bar{x}_0 + ct\end{aligned}$$

ce qui correspond bien à notre intuition de la vitesse d'un signal.

En utilisant la définition des TF et de la distribution $\delta(x)$, il est facile de démontrer que (cf exercice) :

$$\bar{x}(t) = -i\int_I \left(\frac{\partial\tilde{u}(q,t)}{\partial q}\right)\tilde{u}^*(q,t)dq \tag{1.9}$$

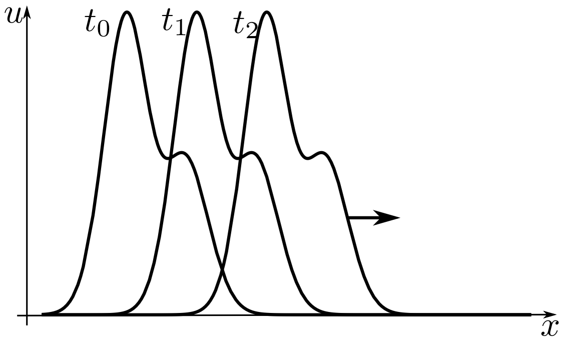

FIGURE 1.3 – un signal $u(x,t)$ en fonction de x à trois temps t différents, se propageant vers la droite.

où $\tilde{u}(q,t)$ est la TF de $u(x,t)$ par rapport à x. Reprenons à nouveau notre signal qui se propage sans se déformer : $u(x,t) = u_0(x-ct)$. Par la règle des manipulation des TF, nous savons qu'une translation dans l'espace direct revient à multiplier par une exponentielle complexe dans l'espace réciproque :

$$\tilde{u}(q,t) = \tilde{u}_0(q).e^{-iqct}$$

En remplaçant dans l'expression (1.9), nous voyons que cela nous donne

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \bar{x}_0 + ct \int_I \tilde{u}_0(q)\tilde{u}_0^*(q)dq \\ &= \bar{x}_0 + ct \end{aligned}$$

puisque, par la relation de Parceval, $\int_I \tilde{u}_0(q)\tilde{u}_0^*(q)dq = \int_I u_0^2(x)dx$.

En général le facteur qui multiplie le temps dans l'exponentiel complexe est appelé la fréquence angulaire ω, qui dans ce cas simple de signal se propageant sans déformation s'écrit

$$\omega = cq$$

et nous voyons que nous pouvons définir la vitesse comme

$$c = \frac{d\omega}{dq}$$

Prenons maintenant le cas plus général de signaux se déformant en se propageant. Il existe un cas très important appelé milieu dispersif, où la déformation du signal prend une forme simple *dans l'espace réciproque* :

$$\tilde{u}(q,t) = \tilde{u}_0(q)e^{-i\omega(q)t}$$

c'est à dire que le mode q est pondéré par un facteur de phase $\omega(q)t$ au temps t, avec une forme $\omega(q)$ quelconque, sans plus nécessairement être proportionnel au mode q. Dans le cas d'un cristal par exemple, on peut démontrer (voir le problème correspondant au chapitre sur les séries de Fourier) que $\omega(q) = A\sin(q)$. Nous pouvons néanmoins calculer la vitesse du barycentre du signal comme avant :

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 + t\int_I \left(\frac{d\omega}{dq}\right)\tilde{u}_0(q)\tilde{u}_0^*(q)dq$$

Si $\omega(q)$ varie de façon lente par rapport à $\tilde{u}_0(q)\tilde{u}_0^*(q)$, et que ce dernier possède un pic étroit en q_0, alors une bonne approximation pour la vitesse du barycentre serait

$$c = \left.\frac{d\omega}{dq}\right|_{q=q_0}$$

Ceci est ce qu'on appelle la vitesse du groupe. L'expression ω/q, ayant un sens pour les signaux se propageant sans déformation, s'appelle la vitesse de phase.

Bruit de Langevin.(transférer au chapitre prochain) (Bien expliquer la signification de $<>$). Langevin a trouvé, vers 1910, une façon extrêmement élégante de traiter le mouvement Brownien, en considérant une particule soumise aux équations classiques du mouvement et à une force *aléatoire* :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \nu\frac{dx}{dt} = \xi(t)$$

ν est la viscosité et $\xi(t)$ une force aléatoire. Nous ne connaissons de cette force que ses caractéristiques stochastiques : La moyenne de cette force est nulle, $\langle\xi(t)\rangle = 0$ et sa variance est proportionnelle à la température : $\left\langle\xi^2(t)\right\rangle = \alpha T$. D'autre part, c'est un bruit blanc : si nous connaissons la valeur de cette force à un instant, nous ne pouvons rien dire sur sa valeur à quelque temps que ce soit après.

1.4 Exercices.

1. Que valent les distributions $\delta(x)\cos(qx)$, $\delta(x)\sin(qx)$ et $\delta'(x)\sin(qx)$?
2. En dérivant directement la fonction $y(t) = (f_0/\omega_0)H(t)\sin(\omega_0 t)$, démontrer qu'elle est la solution de $\ddot{y} + \omega_0^2 y = f_0\delta(t)$.
3. Démontrer que $tH(t)$ est la primitive de $H(t)$. En utilisant une integration par partie, trouver la primitive de $tH(t)$.
4. Une particule initialement au repos de masse m soumise à une force impulsionnelle obéit à l'équation $m\ddot{y} = f_0\delta(t)$. En intégrant directement et en utilisant les conditions initiales, trouver la solution. Trouver la même solution en considérant la particule soumise à une force constante avec une certaine durée $f = (f_0/2T)\Pi(t/T-1)$ et faire tendre ensuite la durée vers zéro.
5. Intégrer directement l'équation $dy/dt + \nu y = f_0\delta(t)$ en utilisant la méthode de la variation des constantes.

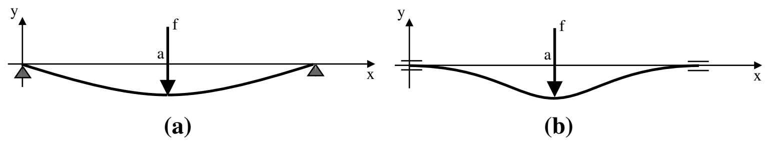

FIGURE 1.4 – la flèche d'un pont sous l'effet d'une force ponctuelle.

6. L'élasticité des barres est donnée par l'équation

$$Bd^4y/dx^4 = F(x)$$

où $F(x)$ est la densité de force (force par unité de longueur) appliquée au point x et B une constante qui donne l'amplitude de la rigidité de la barre et qu'on appelle module de courbure. C'est par exemple cette équation qui donne la *flèche* d'un pont sous l'effet d'une charge. Nous souhaitons connaître la flèche d'un pont de longueur L sous l'effet du mouvement d'un camion à la position a dessus. Comme les dimensions du camion sont petit par rapport au pont, on le modélise par une distribution de Dirac. En résolvant donc l'équation $y^{(4)} = f_0\delta(x-a)$ trouver la forme du pont. Nous utiliserons deux formes de conditions aux limites : (i) pont posé sur des piliers, $y(0) = y(L) = 0$; $y"(0) = y"(L) = 0$ (figure 1.4.a ; (ii) pont ancré aux deux bouts $y(0) = y(L) = 0$; $y'(0) = y'(L) = 0$ (figure 1.4.b) . Pour quelle valeur de a la flèche est maximum ?

7. Démontrer que

$$\int_I xu^2(x)dx = \int_I \tilde{u}'(q)\tilde{u}^*(q)dq$$

où $\tilde{u}(q)$ est la TF de $u(x)$. Help : écrire $\tilde{u}'(q)$ et $\tilde{u}^*(q)$ par leurs définition des TF, former leurs produit et intégrer sur q. Il suffira juste de remarquer que $\int_I \exp(iq(x-y))dq = 2\pi\delta(x-y)$.