1 Équation à dérivée partielle du premier ordre.

Le monde des équations à dérivées partielles (EDP) est vaste, et des centaines de livres, souvent extrêmement pédagogiques, leur sont consacrées. Les EDP les plus utilisées en physique sont de second ordre pour l'espace, et de premier ou de second ordre pour le temps. Ce sont les équations de la chaleur, de Laplace et de Poisson, et l'équation d'onde. Nous n'allons pas traiter ces équations de façon générale ; les méthodes des chapitres précédents (TF,TL, Green,...) sont les outils de base par lesquels ces EDP linéaires sont abordées.

Les EDP linéaires *de premier ordre* sont par contre exactement soluble par la méthode des caractéristiques, au moins en théorie. Il est utile d'en donner un bref aperçu.

1.1 La méthode des caractéristiques.

Nous souhaitons déterminer la fonction $\phi(s,t)$ obéissant à l'équation :

$$\partial_t\phi + P(s)\partial_s\phi = Q(s)\phi \tag{1.1}$$

Nous cherchons la solution sous forme de $\phi(s,t) = f(s)g(u(s,t))$ où f, g, u sont des fonctions inconnues à déterminer. A priori, nous n'avons rien gagné d'autre que l'augmentation du nombre de fonctions inconnues. Mais nous gagnons la liberté d'imposer des contraintes à ces fonctions qui ramènerons le problème à des choses plus connues.

Nous avons, pour les dérivées partielles de ϕ :

$$\partial_t\phi = \partial_t u f(s)g'(u) \tag{1.2}$$
$$\partial_s\phi = f'(s)g(u) + \partial_s u f(s)g'(u) \tag{1.3}$$

En insérant (1.2,1.3) dans l'équation (1.1), nous avons :

$$(\partial_t u + P(s)\partial_s u)f(s)g'(u) + (P(s)f'(s) - Q(s)f(s))g(u) = 0. \tag{1.4}$$

Une solution évidente de (1.4) est donnée par :

$$P(s)f'(s) - Q(s)f(s) = 0 \tag{1.5}$$
$$\partial_t u + P(s)\partial_s u = 0 \tag{1.6}$$

L'équation (1.5) est une équation différentielle linéaire homogène de premier ordre en f et sa solution est donnée par $f(s) = \exp(A(s))$, où $A'(s) = Q(s)/P(s)$.

L'équation (1.6) , qui est une EDP de premier ordre homogène, a comme solution $u(s,t) = \exp(W(s) - t)$ où $W'(s) = 1/P(s)$. Notons que la fonction g reste indéterminée. Son choix dépend des conditions initiales imposées au système.

Exemple Nous souhaitons résoudre une équation de diffusion avec un terme de dérive linéaire, appelé Ornstein-Uhlenbeck :

$$\partial_t p = \partial_x(kxp) + D\partial_x^2 p \tag{1.7}$$

avec la condition initiale (CI)

$$p(x,0) = \delta(x - x_0) \tag{1.8}$$

où δ est la fonction de Dirac. $p(x,t)$ est une densité de probabilité de présence à l'instant t à l'abscisse x, et la condition initiale veut simplement dire que toute la probabilité est condensée en x_0 à l'instant $t = t_0$. Soit $\phi(s,t)$ la transformée de Fourier en x de $p(x,t)$:

$$\phi(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} p(x,t)dx$$

l'équation (1.7) se transforme alors en

$$\partial_t \phi + ks\partial_s \phi = -Ds^2 \phi \tag{1.9}$$

avec la condition initiale

$$\phi(s,0) = e^{isx_0} \tag{1.10}$$

L'équation (1.9) est une EDP de premier ordre similaire à (1.1), avec $P(s) = ks$ et $Q(s) = -Ds^2$. Nous avons alors $A(s) = -Ds^2/2k$ et $W(s) = \log(s)/k$. Les fonctions f,u et ϕ s'écrivent :

$$\begin{aligned} f(s) &= \exp(-Ds^2/2k) & (1.11)\\ u(s,t) &= s\exp(-kt) & (1.12)\\ \phi(s,t) &= \exp(-Ds^2/2k)\, g(s\exp(-kt)) & (1.13) \end{aligned}$$

Nous pouvons vérifier par dérivation directe que l'expression (1.13) est bien solution de (1.9). Il nous reste à utiliser la CI (1.10) pour trouver g, ce qui donne :

$$g(s) = \exp(Ds^2/2k + iux_0)$$

et la solution complète s'écrit :

$$\phi(s,t) = \exp\left[\frac{-Ds^2}{2k}(1 - e^{-2kt}) + isx_0 e^{-kt}\right]$$

La fonction ϕ est appelé en probabilité la fonction caractéristique associé à la densité de probabilité p. La moyenne et la variance se calcule aisément si on connaît ϕ :

$$\begin{aligned} < X > &= \int xp(x)dx = -i\frac{\partial \phi}{\partial s}\,|_{s=0}\\ < X^2 > &= \int x^2 p(x)dx = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}\,|_{s=0} \end{aligned}$$

Problème 1. Calculer, pour le processus d'Ornstein, $\langle X(t)\rangle$ et $Var(X(t)) = \langle X^2(t)\rangle - \langle X(t)\rangle^2$.

Problème 2. Croissance exponentielle Pour une croissance exponentielle, l'équation maîtresse s'écrit :

$$\partial_t p(n,t) = (n-1)p(n-1,t) - np(n,t)$$

où $p(n,t)$ est la probabilité pour une population d'avoir la taille n à l'instant t. En utilisant plutôt la transformée de Laplace

$$\phi(s,t) = \sum_n p(n,t)e^{-ns}$$

Calculer $\langle n(t)\rangle$et $Var(n(t))$. La condition initiale est $p(n,0) = \delta_{n,n_0}$. Ceci est également connu sous le nom de processus de Poisson.

Problème 3. (Plus ardu). On démarre avec une population initiale de bactérie n_0, dont les taux de mort et naissance sont égaux et valent α. Calculer $\langle n(t)\rangle$ et $Var(n(t))$.

Nous verrons que l'équation maîtresse dans ce cas s'écrit :

$$\partial_t p(n,t) = (n-1)p(n-1,t) + (n+1)p(n+1,t) - 2np(n,t) \tag{1.14}$$

avec la condition initiale $p(n,0) = \delta_{n,n_0}$. $p(n,t)$ est la probabilité pour la population, à l'instant t, d'avoir la taille n.

Pour résoudre l'éq.(1.14), vous avez plus intérêt à utiliser la transformée de Laplace :

$$\phi(s,t) = \sum_n p(n,t)e^{-ns}$$

1.2 Interprétation géométrique.

Nous avons donné la méthode des caractéristiques comme une recette. Mais cette recette découle d'une interprétation géométrique très simple : les dérivées premières sont les pentes de la fonction selon les diverses directions. Prenons d'abord le cas de l'équation

$$P(s,t)\partial_s\phi + R(s,t)\partial_t\phi = 0 \tag{1.15}$$

Nous pouvons représenter la solution $\phi(s,t)$ comme une surface : $\phi(s,t)$ étant la hauteur à la position (s,t). Si nous pouvions connaître les courbes de niveau de cette surface, nous aurions déjà une très bonne connaissance de la solution (voir figure 1.1). Quand on parcours une courbe de niveau, la valeur de la fonction ϕ y reste constante. Supposons maintenant que nous sommes à une position (s,t). Comment se déplacer d'une quantité (ds, dt) pour que la valeur de la fonction ϕ reste constante ? Quelle doit être le rapport entre le déplacement dans la direction ds et le déplacement dans la direction dt pour ne pas changer d'altitude ? Noter que se donner une relation entre ds et dt en tout point défini une courbe dans le plan (s,t). Par exemple, $dy/dx = -x/y$ défini l'équation d'un cercle de centre origine ; le rayon de ce cercle est donné par une condition initiale.

La variation de ϕ en fonction de (ds, dt) est

$$d\phi = (\partial_s \phi)ds + (\partial_t \phi)dt$$

En comparant cette expression à (1.15), nous voyons qu'il suffit de choisir ds proportionnel à $P(s,t)$ et dt proportionnel à $R(s,t)$ pour que $d\phi = 0$. Autrement dit, pour avoir $d\phi = 0$, il suffit de choisir

$$\frac{ds}{P(s,t)} = \frac{dt}{R(s,t)} \tag{1.16}$$

Comme vous le remarquez, l'expression ci-dessus est une équation différentielle ordinaire donnant la forme de la courbe qu'on appelle caractéristique.

Exemple. L'équation $t\partial_s\phi - s\partial_t\phi = 0$: les courbes de niveaux sont données par $sds + tdt = 0$, autrement dit par $s^2 + t^2 = C$. Ce sont des cercles centrés sur l'origine.

Appliquons cela à l'équation plus simple que nous avions traité au début de ce chapitre :

$$\partial_t\phi + P(s)\partial_s\phi = 0 \tag{1.17}$$

Les courbes de niveau sont données par

$$\frac{ds}{P(s)} = \frac{dt}{1}$$

En intégrant les deux côtés, nous avons donc

$$W(s) - t = C$$

où $W'(s) = 1/P(s)$ et C est une constante d'intégration. La fonction $u(s,t) = W(s) - t = C$ nous donne donc les courbes de niveau, et la solution générale de l'équation (1.17) est donc de la forme

$$\phi(s,t) = g\left(u(s,t)\right)$$

La fonction g doit être trouvée en utilisant les conditions aux bords. Ceci est le sens de la "recette" de résolution que nous avions donné au début de ce chapitre, dans le cas simple où le second membre est nul.

Très bien, nous connaissons les courbes de niveaux. Mais pour vraiment connaître ϕ, il faut connaître la valeur de cette fonction sur chaque courbe. Comment déterminer cela ? Évidement, à l'aide des conditions initiales. Si par exemple, on se donne $\phi(s,0) = I(s)$, nous connaissons alors la valeur de ϕ sur la courbe de niveau qui passe par $(s,0)$ (voir figure 1.1). Autrement dit, en transportant les hauteurs $\phi(s,0)$ le long des courbes de niveau, on reconstruit la surface $\phi(s,t)$. Ceci est le sens de la détermination de la fonction $g(u)$ par les conditions initiales dans la section précédente. Nous avons donc la méthode générale de la résolution d'une EDP de premier ordre.

Exemple : équation d'onde. Soit l'équation $c\partial_x\phi - \partial_t\phi = 0$, avec la condition initiale $\phi(x,0) = f(x)$. Les courbes caractéristiques sont $dx/c = -dt$, autrement dit $x =$

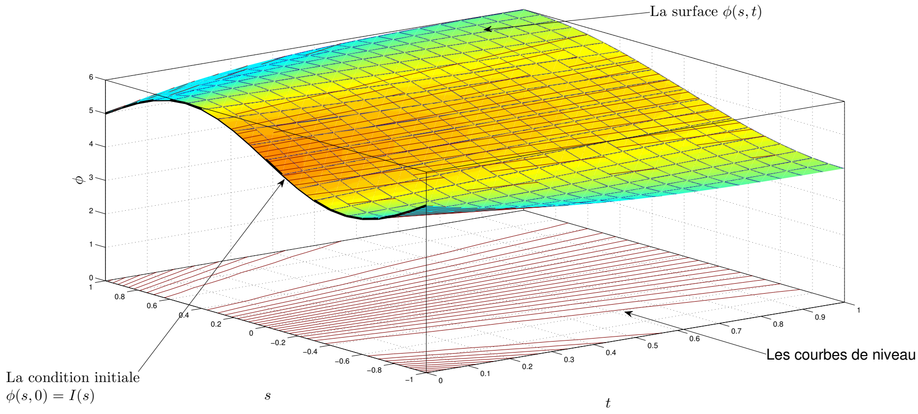

FIGURE 1.1 – Construction d'une solution : nous trouvons d'abord les courbes de niveau dans le plan (t,s). Ensuite, en utilisant la condition initiale $\phi(s,0)=I(s)$, on précise la hauteur de la surface de ϕ sur chacune des courbes et on reconstruit la solution $\phi(s,t)$.

$-ct+x_0$. En inversant cette relation, nous trouvons $x_0=x+ct$. Nous trouvons donc que

$$\phi(x,t)=f(x+ct)$$

Nous avons appelé cette équation "équation d'onde" puisque l'équation $c^2\partial^2\phi/\partial x^2-\partial^2\phi/\partial t^2=0$ se factorise en

$$(c\partial_x-\partial_t)(c\partial_x+\partial_t)\phi=0$$

Si ϕ est solution de $c\partial_x\phi-\partial_t\phi=0$ ou de $c\partial_x\phi+\partial_t\phi=0$, alors ϕ est solution de l'équation d'onde.

1.3 Généralisation.

A partir de là, nous pouvons généraliser notre analyse à l'équation

$$P(s,t)\partial_s\phi+R(s,t)\partial_t\phi=Q(s,t,\phi)$$

avec les conditions initiales $\phi(s,0)=I(s)$. Les courbes caractéristiques données par (1.16) ne sont plus des courbes de niveau, mais la variation de ϕ le long des courbes est donnée par une équation différentielle ordinaire. Supposons que la solution de $ds/P=dt/R$ soit donnée par $s=f(t,s_0)$ [1], c'est à dire $ds/dt=f'(t,s_0)=P/R$. Quand on se déplace le long d'une courbe caractéristique $s=f(t,s_0)$, la variation de ϕ est

$$d\phi \quad = \quad ds\partial_s\phi+dt\partial_t\phi$$

1. Pour être plus général, nous aurions du écrire $f(s,t,s_0)=0$

$$\begin{aligned} &= (P\partial_s\phi + R\partial_t\phi)(dt/R) \\ &= (Q/R)dt \end{aligned}$$

Donc, le long de ces courbes, ϕ est solution de l'équation

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{Q(s,t,\phi)}{R(s,t)} \tag{1.18}$$

La stratégie pour trouver la solution est une modification de ce que nous avons dit précédemment :

1. Trouver la courbe caractéristique $s = f(t, s_0)$, l'inverser pour trouver $s_0 = g(s,t)$.
2. Résoudre l'équation différentielle *ordinaire* (1.18) où $s = f(t, s_0)$ soumise à la condition initiale $\phi(0) = I(s_0)$, *le long* d'une courbe caractéristique.

Exemple. Résoudre l'équation $\partial_s\phi + P(t)\partial_t\phi = Q(t)\phi$ avec la condition initiale $\phi(s,0) = I(s)$. Notez que nous n'avons pas de dépendance explicite en s dans cette équation.

Les courbes caractéristiques sont $ds/1 = dt/P(t)$. Si nous appelons $W(t)$ une primitive de $1/P(t)$, (la fonction W est connue, puisque P l'est) les courbes caractéristiques sont données par $W(t) - s = W(0) - s_0$. Le long de ces courbes, nous choisissons s comme variable indépendante (nous avons le choix du paramétrage) et donc, le long de ces courbes,

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{Q(t)}{P(t)}\phi$$

Si nous appelons $A(t)$ une primitive de Q/P, alors la solution générale de l'équation ci-dessus est

$$\phi(t) = C.\exp(A(t)).$$

Toutes les courbes passant par t (quelque soit leur ordonnée s) ont la forme ci-dessus. Vous pouvez voir cela comme le croisement entre la surface ϕet le plan t. La caractéristique passant par le point (s,t) passe par le point $(s_0, 0)$ où $s_0 = W(t) - s - W(0)$. La solution complète de l'équation s'écrit donc comme

$$\phi(s,t) = I(W(t) - s - W(0).)\exp(A(t)$$

Nous laissons au lecteur le soin de revoir la première section de ce chapitre à la lumière de ces développements.