1 Les équations de la physique.

Nous avons, à de nombreuses occasions, rencontré les diverses équations de la physique. Nous voudrions donner ici une dérivation simple et intuitive de ces équations. Comme nous le verrons, pour établir ces équations, nous *discrétisons* le système et faisons ensuite un passage à la limite. La méthode plus rigoureuse (et riche et élégante et ...) d'aborder ces sujets est le calcul variationnel (voir le chapitre correspondant) . La méthode utilisée dans ce chapitre est celle qui avait été utilisée par Euler lui-même dans les années 1740 pour fonder le calcul des variations. Cette vue consiste à regarder les équations différentielles comme des équations aux différences, avec un pas Δx qui peut être rendu aussi petit que l'on souhaite. Cette vue a quelque peu disparu des mathématiques au début du XIXème siècle quand Cauchy &Co ont donné de la rigueur aux mathématiques, mais a donné très naturellement lieu au développement des calculs matriciels et la formalisation des espaces vectoriels un siècle plus tard par Hilbert &Co. Avec l'arrivée des ordinateurs et la résolution numérique des équations, cette approche redevient tout à fait naturelle. Regardons quelques cas particuliers.

1.1 Qu'est ce qu'une équation différentielle ?

Prenons la plus simple des équations différentielles

$$y' = f(x) \tag{1.1}$$

sur l'intervalle $[0,1]$. Découpons cet intervalle en N morceau de largeur Δx dont les bords sont $x_0 = 0, x_1 = 1/N, x_2 = 2/N, ...x_N = 1$. Nous cherchons à déterminer les $N+1$ valeurs $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y(x_1)$,...$y_N = y(x_N)$. Nous pouvons approximer le terme y' au point x_i par

$$y'(x_i) = \Big(y(x_{i+1}) - y(x_i)\Big)/\Delta x$$

L'équation (1.1) se transforme alors en un système d'équations *algébriques* :

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= \Delta x.f(x_0) \\ y_2 - y_1 &= \Delta x.f(x_1) \\ ... & \quad ... \\ y_N - y_{N-1} &= \Delta x.f(x_{N-1}) \end{aligned}$$

Si vous regardez bien, nous avons $N+1$ inconnus, mais seulement N équations ! Le système est sous déterminé et n'a pas de solution unique. Pour que le système ait le même nombre d'équations que d'inconnus, il faut ajouter une équation supplémentaire, par

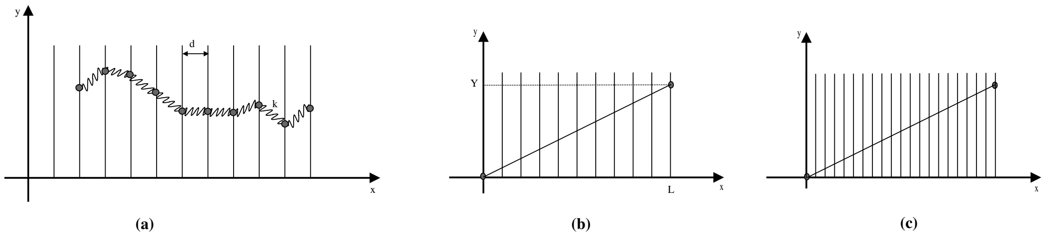

FIGURE 1.1 – Vue discrète d'une corde vibrante.

exemple $y_0 = a$. C'est cela que nous appelons la condition initiale. Nous avons l'habitude de penser aux équations différentielles comme la donnée de deux choses différentes : une équation de la forme (1.1) et des conditions initiales. En réalité, ces deux choses sont indissociables. Nous pouvons maintenant représenter cela sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & & 0 \\ -1 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & -1 & 1 & .. & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & & ... & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \Delta x.f(x_0) \\ f(x_1) \\ . \\ . \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

ou de façon plus succincte $Ay = f$. Nous avons maintenant un système de N équations et N inconnus équilibré. A partir de là, nous pouvons utiliser toute la puissance des techniques d'opérateurs linéaires pour résoudre le problème différentielle. Vous voyez également les différentes généralisations possibles. Si par exemple, nous avons une équation de seconde ordre, nous n'obtiendrons alors que $N-1$ équations pour $N+1$ inconnus et nous devons la supplémenter par *deux* équations aux bords, et ainsi de suite pour des équations d'ordre plus élevés. De la même manière, l'approche se généralise à l'étude des équations aux dérivées partielles. Les techniques de résolution numérique d'équations différentielles ne font que reprendre ces schémas.

1.2 Équation de Laplace.

Considérons un ensemble de N boules de masse m reliées par des ressorts de raideur k. Chaque boule est assujettie à se mouvoir sur une ligne verticale, et les lignes sont espacées de d (figure 1.1.a). L'énergie potentielle totale du système est par conséquent :

$$U(..., y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, ...) = \sum_n \frac{1}{2} k (y_{n+1} - y_n)^2 \quad (1.2)$$

où y_n est l'ordonnée de la n-ième boule (et $x_n = nd$ son abscisse). Pour quelles valeurs des y_k le potentiel est minimum ? Comme U est une fonction de N variables, pour être extremum, il faut que sa dérivée par rapport à chaque variable soit nulle. Considérons la n-ième boule. Dans l'expression de l'énergie sous la somme, il y a seulement deux termes qui contienne la coordonnée de y_n qui sont $(y_n - y_{n-1})^2$ et $(y_{n+1} - y_n)^2$. La minimisation de U par rapport à y_n donne donc :

$$\frac{\partial U}{\partial y_n} = k(2y_n - y_{n-1} - y_{n+1}) = 0 \tag{1.3}$$

Cette dernière relation indique simplement que la force exercée sur la n-ième boule doit être nulle : en effet, la force n'est que le gradient (à un signe près) du potentiel. L'extremum du potentiel correspond à une position d'équilibre où les forces exercées s'annulent. Faisons maintenant $d \to 0$ et $N \to +\infty$ pour retrouver le continuum. La variable $x = nd$ devient continue, de même que la fonction $y(x)$. Comme $y_n = y(x_n) = y(nd)$, nous avons, par un simple développement de Taylor,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_n} d + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_n} d^2 \\ y_{n-1} &= y_n - \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_n} d + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_n} d^2 \end{aligned}$$

L'équation (1.3) se transforme donc en une équation différentielle $d^2y/dx^2 = 0$. A plusieurs dimensions, en appliquant la même démarche, on aboutit à l'équation

$$\Delta y = 0 \tag{1.4}$$

où l'opérateur Δ désigne le laplacien. L'équation (1.4) est appelée justement l'équation de Laplace [1] et comme nous le voyons, est le résultat de la minimisation d'une certaine énergie. C'est exactement cette approche qu'Euler a utilisé pour développer le calcul variationnel et qui a donné lieu aux équations d'Euler-Lagrange.

Que vaut la constante de raideur k ? Elle doit probablement dépendre de notre découpage discret, *i.e.* de l'espacement d entre les éléments discrets que nous avons utilisé pour modéliser le continuum. Mais comment ? La règle fondamentale est que les valeurs que l'on peut mesurer (physiquement) ne doivent pas dépendre de notre découpage. Prenons maintenant une ligne de longueur L que l'on découpe en N morceau espacés de $d = L/N$. Nous maintenons un coté (disons $x = 0$) à $y = 0$, et l'autre coté $(x = L)$ à $y = Y$ (fig. 1.1.b). Comme $(y_{n+1} - y_n) = (Y/L)d$, Selon l'expression (1.2), l'énergie potentielle totale est donnée par

$$U = \sum_n k(Y/L)^2 d^2 = (Y/L)^2 Nkd^2 = (Y/L)^2 Lkd = (Y^2/L)kd$$

Si maintenant nous avions fait un autre découpage en prenant N' boules reliées par des ressorts de constante k' et un espacement d'(fig. 1.1.c), nous aurions trouvé pour

1. Grand mathématicien français de la fin dix-huitième et début dix-neuvième siècle. Très célèbre pour son livre de mécanique céleste, les fondements de la théorie des probabilités (qui l'ont amené à inventer les transformées de Laplace), la théorie moléculaire de la capilarité (quand les molécules n'existaient pas !), ... Ses collègues et contemporins sont Lagrange, Fourier, Poisson et Cauchy. Que du beau monde.

l'énergie $U = (Y^2/L)k'd'$. Comme U ne doit pas dépendre de notre découpage, kd doit être constante :

$$k = \frac{K}{d} \tag{1.5}$$

La constante de ressort *microscopique* (résultat de notre découpage discret) k est relié à une constante physique du système K, (qui dénote l'amplitude de la rigidité du système par rapport à un phénomène physique), par la relation (1.5). Comme $(y_{n+1} - y_n) = y'(x).d + \mathcal{O}(d^2)$, l'expression de l'énergie potentielle devient

$$\begin{aligned} U &= (1/2)\sum \frac{K}{d} y'(nd)^2 d^2 \\ &= (1/2)\int K y'(x)^2 dx \qquad \text{quand } d \to 0 \end{aligned}$$

Pour un champ électrique par exemple, l'énergie est donnée par $\int(\epsilon/2)|\mathbf{E}|^2 d\tau = \int(\epsilon/2)|\nabla V|^2 d\tau$. V est le potentiel électrostatique et l'opérateur gradient (∇) généralise la dérivée à plusieurs dimensions. Ici, le rôle de la constante de rigidité du système (vis à vis du champs électrique) est joué par la constante de perméabilité électrique ϵ. En élasticité, la variable du champ est appelé *déplacement*, et la rigidité du système est donnée par le module d'Young [2]. Dans le cas des gaz, nous somme en présence d'un champ de *pression* et K est l'inverse du coefficient de compressibilité.

1.3 Équation d'onde et de chaleur.

Nous nous sommes préoccupé dans la précédente section de phénomènes statiques. Essayons maintenant de formuler la dynamique. Revenons à notre exemple du figure (1.1.a) et supposons que chaque boule a une masse m. Nous pouvons maintenant écrire la relation fondamentale de la dynamique $F = ma$ pour chaque boule. L'accélération de la n-ième boule est donnée par d^2y_n/dt^2. La force sur la n-ième boule étant égale au gradient du potentiel, *i.e.* $F_n = -\partial U/\partial y_n$, nous avons, en suivant ce que nous avons dit plus haut,

$$m\frac{d^2y_n}{dt^2} = -k(2y_n - y_{n+1} - y_{n-1}) \tag{1.6}$$

Comment m dépend de notre découpage ? La réponse est plus simple cette fois. Si nous désignons par ρ la densité (linéaire à une dimension), nous avons $m = \rho d$. Nous avons également, comme indiqué plus haut, $k = K/d$ et $(2y_n - y_{n+1} - y_{n-1}) \approx -(\partial^2 y/\partial x^2)d^2$. Quand $d \to 0$, l'équation (1.6) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{(K/d)}{\rho d}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} d^2 \\ &= \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{1.7}$$

2. Maxwell, le fondateur de la théorie électromagnétique dans les années 1860, considérait les phénomènes électromagnétiques comme des déformations élastiques d'une substance hypothétique appelée éther et s'est beaucoup inspiré des travaux sur l'élasticité pour formuler sa théorie.

C'est ce qu'on appelle l'équation d'onde. Elle se généralise de la même manière à plusieurs dimensions (l'opérateur Δ généralise la dérivée seconde). La constante K/ρ possède la dimension d'une vitesse au carré (pourquoi ?) et désigne, comme nous l'avons vu, la vitesse de propagation des ondes.

Question : qu'est ce qui joue le rôle de la densité pour les phénomènes électriques ?

Nous pouvons maintenant aborder plusieurs généralisations. Si les boules "baignent" en plus dans un "liquide" , il faut tenir compte de la force de dissipation visqueuse qui est proportionnelle (et opposée) à la vitesse, et donc à $-dy_n/dt$. L'équation d'onde devient alors, lors de la passage à la limite $d \to 0$,

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \lambda\frac{\partial y}{\partial t} = K\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

En électromagnétisme, λ dénote le coefficient d'absorption d'un matériau (l'inverse de sa transparence). Nous voyons que si la masse des boules (la force inertielle) peut-être négligée par rapport aux autres forces de frottement et appliquée par les voisins (penser aux boules baignant dans du miel), nous pouvons négliger la dérivée d'ordre 2 par rapport au temps et écrire

$$\frac{\partial y}{\partial t} = D\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

qui n'est rien d'autre que l'équation de la chaleur. Il est peut-être difficile pour le lecteur de penser au champ de température comme des boules qui se meuvent dans du miel [3]. Nous le référons à la théorie de la réponse linéaire en physique statistique pour une dérivation de l'équation de la chaleur qui ait une plus grande réalité physique.

Revenons encore une fois à notre image de boules de la figure (1.1.a) . Et imaginons qu'en plus d'être reliées par un ressort de raideur k les uns aux autres, elles sont en plus reliées à l'axe x par un ressort de constante Vd (nous normalisons tout de suite la raideur par l'espacement, en laissant le soin au lecteur de démontrer que cela effectivement est la bonne forme). Nous n'avons aucune obligation à penser que V doit être une constante. A certain endroit le long de l'axe x, elle peut être forte, à d'autres endroit, faible. Nous notons donc V_n la constante du ressort qui relie la n-ième boule à l'axe x. L'expression de l'énergie potentielle totale est donc

$$U = \sum_n \frac{1}{2}\frac{K}{d}(y_{n+1} - y_n)^2 + d.V_n y_n^2$$

Il ne sera alors pas difficile pour le lecteur de démontrer que l'équation d'onde s'écrit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - V(x).y$$

et l'expression de l'énergie (potentielle) est de la forme

$$\int (K/2)|\nabla y|^2 + (1/2)V(x)y^2 dx$$

3. Même si la conception de la chaleur comme un fluide de "calorique" était populaire jusqu'au début du XIXème siècle.

forme couramment utilisée dans la théorie du ferromagnétisme.

le cas de l'équation de Schrödinger comme deux équations couplées, et le rapprochement avec particules dans champs magnétique ou les équations de second degrés ;

Traitement du processus dissipatif en développant le BABA de la réponse linéaire en phys stat. le cas de l'équation de la chaleur, indication (par potentiel chimique) pourquoi ça se généralise à la diffusion de concentration etc.