# 1 Les formes différentielles et la dérivation extérieure.

## 1.1 Introduction.

L'analyse des fonctions d'une seule variable est simple : nous savons prendre la dérivée première, seconde, ... et cela a un sens direct (pente, courbure,...). Quand on aborde les fonctions de plusieurs variables, les choses commencent à se compliquer. Les opérateurs différentielles prennent alors des noms étranges comme gradient, divergence, rotationnel,... Et nous découvrons qu'il existe des relations entre ces êtres : prendre la *circulation* le long d'une courbe fermée revient à calculer le *flux* d'un rotationnel à travers la surface engendrée par cette courbe ; calculer le flux à travers une surface fermée revient à prendre l'intégrale de la divergence *dans* le volume,... Si vous êtes très versé dans la manipulation de ces objets, vous savez peut-être ce que vaut $\mathbf{grad}(\mathbf{div} f)$ par cœur !

Tout cela n'est pas très joli. D'abord, nous avons de la peine à distinguer la signification de tous ces opérateurs et des relations qui existent entre eux ; ensuite, cette analyse vectorielle ne marche qu'à *trois* dimensions [1] ; Enfin, les équations mathématiques deviennent confuses : pourquoi la dérivée temporelle du champ magnétique devrait être liée au rotationnel du champ électrique ? On sent bien qu'il y a des arguments de géométrie derrière cela, mais quoi exactement ?

A partir du début du vingtième siècle, des mathématiciens comme Poincaré et Cartan ont réalisé que derrière tout ce chaos, il y avait de l'ordre, exactement comme la découverte de l'existence des atomes a donné un sens à la chimie. Les atomes en question ici s'appellent des formes différentielles, et nous allons les étudier plus en détails. Disons simplement que toutes ces relations entre opérateurs ne sont en faite que des généralisations du Théorème Fondamental de l'analyse :

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

## 1.2 Les $1-$formes.

Une 1-forme est une application linéaire qui agit sur un vecteur et produit un nombre. Le lecteur est probablement habitué déjà à ce concept : en notation matricielle, les (vrais) vecteurs sont représentés par des colonnes (vecteur colonne) ; ceci dit, nous avons également des vecteurs *lignes*. Ces vecteurs lignes sont ce qu'on appelle des 1-formes.

1. Et cela par un malentendu qui fait correspondre un vecteur aux produit vectoriel dans le cas des espaces à trois dimensions.

L'application d'une forme $\tilde{u}$ à un vecteur $v$ revient à "multiplier" son "vecteur" ligne par le vecteur colonne de $v$ pour produire un nombre.

Bien. Ceci dit, une colonne de nombre est juste une *représentation* d'un vecteur, qui dépend de la base choisie. Les vecteurs sont des objets géométriques qui ne dépendent évidemment pas de leurs représentations [2]. De la même manière, les 1-formes ne sont pas des vecteurs lignes qui est juste une façon de les représenter par des nombre : Le scalaire $\tilde{u}(v)$ ne dépend pas de la base que nous avons choisie.

Pour développer notre théorie, il est pratique de nous donner une base. Prenons, pour simplifier les choses, un espace *plat* à 3 dimensions, où nous nous donnons trois vecteurs indépendants $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ et $\mathbf{e}_z$. N'importe quel vecteur peut maintenant être représenté par une combinaison du genre $\mathbf{v} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z$ où les coefficients $a_y$ sont des nombres.

De la même façon, nous pouvons nous donner une base dans l'espace des formes et écrire une 1-forme $\omega$ comme une combinaisons de ces 1-formes de base. C'est ici que les mathématiciens ont introduit une notation qui peut paraître déroutant aux physiciens [3], mais qui s'avère extrêmement féconde. Il existe par exemple un (unique) 1-forme $\omega_x$ tel que

$$\omega_x(\mathbf{e}_x) = 1\,;\ \omega_x(\mathbf{e}_y) = 0\,;\ \omega_x(\mathbf{e}_z) = 0$$

Nous appellerons cette 1-forme $dx$. Ici, $dx$ n'a rien d'infinitésimal, sa représentation est le vecteur ligne $(1, 0, 0)$. De la même façon, nous définissons les 1-formes $dy$ et $dz$. Ainsi, $dy(a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z) = a_y$.

Un exemple de 1-forme est la force $f$ en mécanique [4]. Quand sous l'action de cette force, un point matériel bouge du point $P_1$ au point $P_2$, le travail (qui un scalaire) de cette force est $f(\vec{P_1P_2})$, c'est à dire l'application de la 1-forme $f$ au vecteur $\vec{P_1P_2}$. Donnons nous par exemple un champ de force constant $f = 2dx + 3dy$ et supposons que le déplacement [5] $\vec{P_1P_2} = 3\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$. Alors le travail de cette force est

$$W = 2dx(3\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y) + 3dy(3\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y) = 6 + 6 = 12$$

Généralisons un peu plus. De la même façon que nous définissions un champ de vecteur (pensez le champ de déplacement $\mathbf{u}(x, y, z)$ des points d'un corps matériel sous l'action des forces), nous pouvons définir un champ de 1-forme comme par exemple

$$\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

L'application de cette 1-forme à un vecteur $\vec{P_1P_2}$ produit un scalaire qui dépend non seulement du vecteur $\vec{P_1P_2}$, mais également de la localisation de ce vecteur dans l'espace [6].

2. C'est la différence entre une personne et une photo de cette personne.
3. Utiliser ces notations demande un peu de schizophrénie de la part de l'étudiant physicien, qui doit désapprendre ses propres notations.
4. Oui, la force n'est pas un vecteur, mais un 1-forme
5. Oui, le déplacement est un vecteur.
6. Il existe une différence entre un vecteur abstrait, c'est à dire un objet appartenant à un espace vectoriel, et un vecteur géométrique reliant deux points $P_1$ et $P_2$. Les deux concepts sont fortement connectés, mais différents.

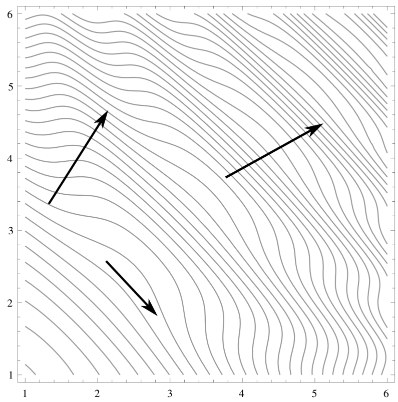


Figure 1.1 – Comment représenter les 1-formes ? Dans l'espace à 2 dimensions, une très bonne représentation sont les lignes de flux. Ainsi, l'action d'une 1-forme sur un vecteur est le nombre de ligne que ce vecteur coupe. Ici, nous l'avons ainsi représenté. Le lecteur est déjà familier avec cette représentation comme courbes de niveau pour certaines 1-formes. Pour ces formes là, ceci est une bonne représentation du gradient, comme nous le verrons plus bas. De façon générale, nous pouvons, dans un espace à $n$ dimensions, représenter les 1-formes par des hyper surfaces.

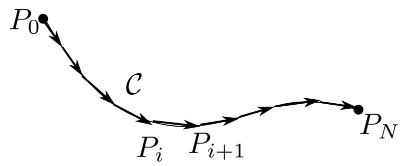
Si le vecteur est "petit", que le point $P_0$ qui désigne son milieu est de coordonnées $(x_0, y_0)$, et que nous pouvons le représenter par le vecteur colonne $(h, k)^T$, alors

$$\omega(\vec{P_1P_2}) = f(x_0, y_0)h + g(x_0, y_0)k$$

A vrai dire, le mot "différentielle" dans "forme différentielle" sous-entend bien que nous nous adressons qu'aux "petits" vecteurs ; l'action des formes sur des plus grands objets s'obtient par la sommation de leurs actions sur les petits, ce qu'on désigne par intégration. Nous verrons cela plus bas.

## 1.3 Intégration des 1-formes.

Nous avons une idée assez claire de ce que veux dire l'intégrale d'une fonction d'une variable sur un intervalle $[a, b]$. Nous devons maintenant définir exactement ce que l'on entend par l'intégration des 1-formes le long d'un chemin $\mathcal{C}$ reliant deux points $A$ et $B$. Géométriquement, cela est très simple : Donnons nous une 1-forme $\omega$, un chemin $\mathcal{C}$ et $N+1$ points le long de la courbe $(P_0 = A, P_1, ...P_i, ..., P_N = B)$. Nous définissons




$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} \omega(\overrightarrow{P_iP_{i+1}})$$

En clair, nous appliquons le 1-forme à tous les "petits" vecteurs dont l'union constitue le chemin. Remarquez que nous avons transféré, pour l'intégration ici le poids du "petit" des formes aux vecteurs.

Ceci dit, comment faire l'intégration concrètement ? Soit la forme $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ et le chemin $\mathcal{C}$. Nous pouvons donner l'équation de la courbe sous forme paramétrique $x = x(t)$ et $y = y(t)$ pour $t \in [a, b]$. Nous avons alors, selon les opérations classiques de l'analyse[7], $dx = x'(t)dt$ et $dy = y'(t)dt$. Nous avons alors

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y)dx + g(x, y)dy = \int_a^b \left\{ f(x, y)x'(t) + g(x, y)y'(t) \right\} dt$$

7. Les formes différentielles ne font que généraliser les concepts d'analyse.

**Exemple 1.1** Intégrons la forme $\omega = ydx + xdy$ le long du quart de cercle de rayon 1 parcouru dans le sens positif. Nous pouvons paramétriser le quart de cercle par $x = \cos t$ et $y = \sin t$ pour $t \in [0, \pi/2]$. Nous avons alors

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_0^{\pi/2} \left(-\sin^2(t) + \cos^2(t)\right) dt \quad = \quad 0$$

L'intégration de $-ydx + xdy$ le long du même chemin nous donnerai $\pi/2$.

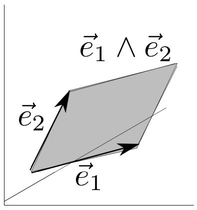
En physique, nous ne faisons souvent pas de distinction entre 1-forme et vecteur. Ainsi, le 1-forme $\omega = adx + bdy$ est souvent remplacé par le vecteur $\mathbf{f} = (a, b)^T$. L'intégrale $\int_{\mathcal{C}} \omega$ est écrit dans ces notations comme

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}.d\mathbf{s}$$

où $d\mathbf{s}$ est un élément infinitésimal et le "point" désigne le produit scalaire.

## 1.4 les $n-$formes et les $n-$vecteurs.

Dans l'espace, nous avons des points, des vecteurs (reliant deux points proches), et des 1-formes. Nous pouvons maintenant généraliser ces concepts et construire des objets plus complexes. Par exemple, nous pouvons construire des bi-vecteurs. De la même manière qu'un vecteur $\vec{e}$ peut être utiliser pour "porter" un segment de ligne orienté, un bi-vecteur $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ peut être utilisé pour porter un élément de surface *orientée*[8]. Ainsi, nous avons




$$\begin{aligned} \vec{e} \wedge \vec{e} &= 0 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 &= -\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 \end{aligned}$$

un bi-vecteur a toute les propriétés usuelles de distributivité qu'on attend de lui. Par exemple, $\vec{e}_1 \wedge (\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3$. Si dans l'espace $n = 3$ des vecteurs, nous avons pris $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ comme éléments de la base, Dans l'espace des bi-vecteurs, nous pouvons définir $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$ comme les éléments de la base. De façon générale, dans un espace à $n$ dimensions, la dimension de l'espace des bi-vecteurs est $\binom{n}{2}$. Un hasard malheureux (ou heureux, selon les points de vue) fait que si $n = 3$, l'espace des bi-vecteurs est de dimension 3 également. Une certaine habitude s'est alors instaurée de représenter le bi-vecteur par un *vecteur* (normale à la surface), en mettant en garde l'utilisateur que ces vecteurs sont un peu anormaux, qu'il faut les appeler "axial", etc.

Bien, les 2-formes sont de la même manière une généralisation des 1-forme. Une 2-forme $\omega$ s'applique à un bi-vecteur pour produire un scalaire de façon bilinéaire. Ainsi, la 2-forme $dxdy$ appliquée[9] à $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ produit le nombre 1. Une 2-forme constante peut-être vue comme un flux ; appliqué à une surface, cela produit le flux à travers cette surface.

8. L'opération $\wedge$ est appelé "produit extérieur".
9. La convention est d'omettre le $\wedge$ entre $dx$ et $dy$.

## 1.5 L'intégration des $k-$formes.

Tout ce que nous avons dit sur les 1-forme se généralise aux $k$-formes. Nous appellerons un $k-$surface un objet que l'on peut paramétrer par $k$ variables. Une courbe par exemple est une 1-surface, une surface au sens habituel est une 2-surface, un volume un 3-surface et ainsi de suite. Dans un espace à $n$ dimensions, nous pouvons donner un sens très précis à l'intégration d'un $k-$forme $\omega$ sur un $k-$surface $\mathcal{S}$ : nous découpons $\mathcal{S}$ en $N$ "petits" éléments portés par des $k-$vecteurs $a_i$ et nous définissons

$$\int_{\mathcal{D}} \omega = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} \omega(a_i)$$

Le calcul effectif se fait par une paramétrisation de $\mathcal{D}$. Par exemple, une 2-formes dans l'espace à 3d peut être représentée par

$$\omega = f(x,y,z)dxdy + g(x,y,z)dydz + h(x,y,z)dzdx$$

Pour calculer concrètement l'intégrale $\int_{\mathcal{S}} \omega$, on paramétrise la surface par deux variables

$$x = a(u,v); y = b(u,v); z = c(u,v)$$

avec $(u,v) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Nous avons alors

$$dx = \frac{\partial a}{\partial u}du + \frac{\partial a}{\partial v}dv$$

et l'élément $dxdy$ par exemple devient

$$dxdy = \left(\frac{\partial a}{\partial u}du + \frac{\partial a}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial b}{\partial u}du + \frac{\partial b}{\partial v}dv\right)$$

Or, comme $dudu = dvdv = 0$ et $dudv = -dvdu$, nous trouvons simplement

$$dxdy = \left(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial b}{\partial u}\right)dudv$$

et ainsi pour les autres éléments. La parenthèse représente bien sûr ce que nous appelons un Jacobien, c'est à dire le déterminant de la matrice des dérivées. Quand vous passez des vecteurs $e_1, e_2$ aux vecteurs $f_1, f_2$ par une transformation linéaire $A$, le déterminant de $A$ est le scalaire qui relie les surfaces portées par les deux jeux de vecteurs. Ceci est *la définition* du déterminant, indépendamment de la base choisie pour exprimer la matrice de $A$. Le Jacobien apparaît ici puisque nous sommes passé des $dx$,$dy$,$dz$ aux $du$,$dv$ par une transformation linéaire donnée par la matrice des dérivées.

### Connexion avec l'analyse vectorielle.

En analyse vectorielle classique, nous rencontrons souvent l'intégrale d'un champ de vecteur le long d'une courbe, de surface, de volume, ... Par exemple, nous savons que le travail effectué par un champ de force le long d'une courbe est appelé *circulation* du vecteur. Soit le vecteur $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)^T$. Sa circulation $C$ le long d'une courbe $\mathcal{C}$ est définie par

$$C = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}.d\mathbf{t}$$

où $d\mathbf{t}$ est un petit vecteur tangent à la courbe au point $P$, et $\mathbf{f}.d\mathbf{t}$ représente le produit scalaire entre ces deux vecteurs. En langage de forme différentielles, au vecteur $\mathbf{f}$ est associée la 1-forme $\tilde{f} = f_x dx + f_y dy + f_z dz$ et la circulation est simplement

$$C = \int_{\mathcal{C}} \tilde{f}$$

De même, le flux $\Phi$ d'un champ de vecteur $\mathbf{f}$ à travers une surface $S$ est définie par

$$\Phi = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{f}.\mathbf{n}.dS \tag{1.1}$$

où $dS$ est un élément infinitésimal de surface, $\mathbf{n}$ est le vecteur “normal” à cet élément, et $\mathbf{f}.\mathbf{n}$ représente le produit scalaire. En langage des formes différentielles, au “vecteur” $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)^T$ est associée la 2-forme $\tilde{f} = f_x dydz + f_y dzdx + f_z dxdy$ et le flux est simplement

$$\Phi = \int_{S} \tilde{f} \tag{1.2}$$

La définition habituelle du flux en analyse vectorielle est problématique à cause de la définition du vecteur $\mathbf{n}$ normal à la surface en un point. A trois dimensions, un petit élément de surface peut éventuellement être représenté par un vecteur (qu'on appelle alors axial) ; à dimension supérieure cependant, un élément de surface ne peut pas être représentée par un vecteur et la définition (1.1) n'est plus valide. La définition (1.2) en terme de forme différentielle reste bien sûr toujours valide.

## 1.6 La dérivation extérieure.

Jusque là, les $p-$formes ne nous ont apporté rien de nouveau. Leur vrai beauté apparaît avec la dérivation. Nous allons d'abord donner la technique et nous viendrons ensuite sur le sens.

La dérivation extérieur transforme une $p-$forme en une $(p+1)$-forme. Le principe est le suivant : quand on rencontre une expression du genre $A(x, y, z, ...)dxdy...$, on prend le différentiel de $A$ au sens usuel $(\partial A/\partial x)dx + \partial A/\partial y)dy + ...$ et on multiplie par l'élément $dxdy...$ qui était devant. Si on rencontre des $dxdx$, et bien cela vaut zéro et on ne s'en occupe pas ; enfin, on arrange de façon cohérente les divers $dxdz$, ... Cela sera sans doute plus claire à travers des exemples. Dans les exemples ci-dessous, nous prenons un espace à trois dimensions.

**Exemple 1.2** Soit la $0-$forme $\omega = f(x,y,z)$. Alors, trivialement,

$$d\omega = (\partial f/\partial x)dx + (\partial f/\partial y)dy + (\partial f/\partial z)dz$$

Nous voyons donc que $d\omega$ représente ce qu'en général nous appelons un gradient et notons $\nabla f$.

**Exemple 1.3** Soit la $1-$forme $\omega = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$. La dérivation de la première partie nous donne

$$\begin{aligned} d[A(x,y,z)dx] &= [(\partial A/\partial x)dx + (\partial A/\partial y)dy + (\partial A/\partial z)dz]\,dx && (1.3)\\ &= -(\partial A/\partial y)dxdy + (\partial A/\partial z)dzdx && (1.4)\end{aligned}$$

Nous somme passé de la première ligne à la seconde en notant que $dxdx = 0$ et nous avons réarrangé le $dydx$ en $-dxdy$. En continuant l'opération sur les deux autres parties restantes et en regroupant les termes, nous trouvons finalement

$$\begin{aligned} d\omega &= [-(\partial A/\partial y) + (\partial B/\partial x)]\,dxdy\\ &+ [-(\partial B/\partial z) + (\partial C/\partial y)]\,dydz\\ &+ [(\partial A/\partial z) - (\partial C/\partial x)]\,dzdx\end{aligned}$$

Vous avez bien sûr reconnu ce qu'en analyse vectorielle nous noterions par une "rotationnelle". Il suffit, pour reconnaître les notations habituelles, de remplacer $A$ par $F_x$, $B$ par $F_y$ et $C$ par $F_z$.

**Exemple 1.4** Soit la $2-$forme $\omega = A(x,y,z)dxdy + B(x,y,z)dydz + C(x,y,z)dzdx$. Le seul terme non nul de la dérivation de la première partie est le terme $(\partial A/\partial z)dzdxdy$ que l'on réarrange en $(\partial A/\partial z)dxdydz$ en permutant d'abord $dz$ et $dx$, ensuite $dz$ et $dy$ ($-1 \times -1 = 1$, d'où le signe positif du réarrangement). En regroupant tout les termes, nous obtenons

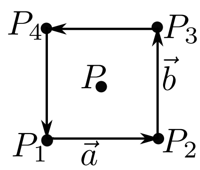
$$d\omega = [(\partial A/\partial z) + (\partial B/\partial x) + (\partial C/\partial y)]\,dxdydz$$

qui, en notations vectorielles, désignerait une "divergence" (Remplacer $A$ par $F_z$, $B$ par $F_x$ et $C$ par $F_y$ pour les notations habituelles).

Nous voyons donc que les divers opérateurs différentiels de l'espace à trois dimensions ne sont que des formes déguisées de la dérivation (extérieure) des formes différentielles. C'est pour cela que le gradient, associé à une $1-$forme, est toujours intégré le long d'une courbe, tandis que la rotationnelle, associée à une $2-$forme, est intégrée sur une surface (on calcule toujours le flux d'une rotationnelle à travers une surface) ; enfin, la divergence, associée à une $3-$forme est toujours intégrée dans un volume. Noter également que les opérateurs différentielles habituels ne sont bien défini que dans l'espace à trois dimensions, tandis que la dérivation des formes extérieurs se fait indépendamment de la dimension et de façon presque mécanique, sans avoir à apprendre par cœur quoique ce soit. Si par ailleurs, vous êtes incapable de vous souvenir de la forme des opérateurs différentiels dans d'autres systèmes de coordonnées, transformez les formes ci-dessus en coordonnées polaire ou sphérique et dérivez les pour vous convaincre de la simplicité de manipulation des formes (voir les exercices).

Le point le plus fondamental est le corpus géométrique que les formes nous procurent et avec lequel nous allons nous familiariser par la suite.

Que signifie géométriquement la dérivation extérieur ? Commençons par la dérivation d'une 1-forme $\omega$ à un point $P$ de l'espace. Donnons nous deux "petits" vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et faisons un circuits $\mathcal{C}$ autour du point $P$ en suivant alternativement ces deux vecteurs. Appelons $I$ l'intégrale de notre 1-forme le long de ce chemin. Nous définissons alors la 2-formes $d\omega$ comme la $2-$forme qui, appliquée au bi-vecteur $\vec{a}\wedge\vec{b}$, produirait le même scalaire $I$ :




$$d\omega(\vec{a}\wedge\vec{b}) \stackrel{def}{=} \int_{\mathcal{C}} \omega$$

à la limite quand les deux vecteurs $\to 0$. La technique que nous avons donnée plus haut calcule explicitement la 2-forme. Voyons cela de plus près. Prenons pour simplifier la 1-forme $\omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy$ et posons $\vec{a} = (2h, 0)^T$ et $\vec{b} = (0, 2k)^T$. Si $(x,y)$ sont les coordonnées du point $P$, les coordonnées du milieu du segment $P_1P_2$ par exemple est $(x, y-k)$. Donc,

$$\begin{aligned}\omega(\overrightarrow{P_1P_2}) + \omega(\overrightarrow{P_3P_4}) &= \left(f(x,y-k) - f(x,y+k)\right)(2h) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial y}(4hk)\end{aligned}$$

En calculant l'application de $\omega$ aux deux autres vecteurs restants, nous trouvons finalement que

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)(4hk)$$

Ce qui est exactement ce que produit la 2-forme $d\omega$ appliquée à $\vec{a}\wedge\vec{b}$.

Cette construction se généralise aisément à la dérivation des $n-$formes. Pour la dérivation d'une 2-forme $\omega$ par exemples, nous nous donnons trois "petits" vecteurs autours d'un point $P$, et calculons la somme $I$ de l'application de la 2-forme à toutes ces surfaces (correctement orientées). Il existe une 3-forme qui, appliquée au tri-vecteur en question, produit le même nombre et correspond bien sûr à notre $d\omega$.

## Lemme de Poincaré.

Ce lemme est quelque chose de tellement évident qui n'a pas mérité le nom de théorème ; ceci dit, nous l'utilisons constamment dans divers contexte en lui donnant des noms différents (par exemple les deux premières équations de Maxwell). Le voici :

$$d(d\omega) = 0$$

Dériver deux fois une $k-$forme produit la $(k+2)-$forme nulle ! Prenons par exemple une 0-forme dans l'espace à 2 dimensions $f(x,y)$ et dérivons là deux fois :

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\ d^2 f &= \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) dxdy = 0 \end{aligned}$$

Ceci a un caractère très général : quelque soit la forme que vous prenez, en la dérivant deux fois, vous tombez sur des expressions où nous avons des dérivées secondes croisées qui apparaissent deux fois avec des signes opposées.

Si par ailleurs, le lecteur a bien compris la signification géométrique de la dérivation extérieure, il n'aura pas de mal à démontrer le lemme de façon générale, sans faire appel aux coordonnées.

*§ 1.1* Démontrer pourquoi en calcul vectoriel, nous avons les identités

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla f) &= 0 \\ \mathrm{div}(\nabla \times \mathbf{u}) &= 0 \end{aligned}$$

### Changement de variable.

Une des beautés des formes différentielles est la facilité qu'elles ont à gérer les changements de variables, de façon presque automatique. Prenons par exemple la forme $\omega = dxdy$ en coordonnées cartésiennes à 2 dimensions qui nous sert à mesurer l'aire d'une courbe fermée. En coordonnées polaire nous avons

$$\begin{aligned} x = r\cos\theta \quad &; \quad y = r\sin\theta \\ dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \quad &; \quad dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta \end{aligned}$$

et donc $\omega = rdrd\theta$. Obtenir une forme dans un autre système de coordonnées et juste une question de multiplication des formes. Cet exemple nous sert également à illustrer que la dérivation extérieure est indépendante du système de coordonnées choisi. En système cartésien, nous avons par exemple $\omega = d\eta$ où $\eta = (xdy - ydx)/2$. En coordonnées polaires, le même calcul nous amène à

$$\eta = (1/2)r^2 d\theta$$

et nous voyons bien que $d\eta = rdrd\theta$. La "recette" pour effectuer la dérivation extérieure se charge de rendre cette opération libre des coordonnées.

*§ 1.2* Démontrer cela de façon générale.

## Manipulation des dérivations.

La première chose à maîtriser, comme dans le cas de la dérivation usuelle, est la règle de la dérivation d'un produit, qui s'écrit légèrement différemment :

$$d(\omega_1\omega_2) = (d\omega_1)\omega_2 + (-1)^{\deg(\omega_1)}\omega_1(d\omega_2)$$

où deg mesure la dimensionnalité de notre forme. Le signe est une conséquence de la commutativité des formes :

$$\omega_1\omega_2 = (-1)^{\deg(\omega_1)}\omega_2\omega_1$$

*§ 1.3* Démontrer, en analyse vectorielle à 3 dimensions, que

$$\mathbf{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \mathbf{div}(\vec{A})\vec{B} - \vec{A}.\mathbf{div}(\vec{B})$$

### Exemple fondamental : le champ électromagnétique.

Soit la 1-forme $A = -A_0 dt + A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$ dans l'espace à quatre dimension. Nous avons l'habitude d'appeler $A_0 = V$ le potentiel électrique et $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)^T$ le potentiel vecteur. Le signe $-$ dans la coordonnée associée à $dt$ est dû à la signature de notre espace-temps. Nous pouvons construire la forme $dA$. La seule complication est d'ordonner correctement les choses à 4d :

$$\begin{array}{rcl} dA & = & -\left((\partial_x A_0)dx + (\partial_y A_0)dy + (\partial_z A_0)dz\right)dt \\ & - & \left((\partial_t A_1)dx + (\partial_t A_2)dy + (\partial_t A_3)dz\right)dt \\ & + & \left(-\partial_y A_1 + \partial_x A_2\right)dxdy \\ & + & \left(-\partial_z A_2 + \partial_y A_3\right)dydz \\ & + & \left(\partial_z A_1 - \partial_x A_3\right)dzdx \end{array}$$

Nous avons pris la peine de séparer les différentes contributions selon les conventions usuelles [10]. Par exemple, la 1-forme qui multiplie $dt$

$$E = -(\partial_x A_0 + \partial_t A_1)dx + (\partial_y A_0 + \partial_t A_2)dy + (\partial_z A_0 + \partial_t A_3)dz$$

est appelé (tri-) vecteur "champ électrique" et défini (en analyse vectoriel) comme

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\nabla V} - \partial_t\vec{A}$$

La 2-forme qui reste (tout ce qui ne contient pas $dt$)

$$B = \left(-\partial_y A_1 + \partial_x A_2\right)dxdy + \left(-\partial_z A_2 + \partial_y A_3\right)dydz + \left(\partial_z A_1 - \partial_x A_3\right)dzdx$$

est appelé tri-vecteur champ magnétique. Nous voyons ici pourquoi $\vec{B}$ n'est pas un vrai vecteur, puisqu'en réalité, il est associé à une 2-forme :

$$B_x = -\partial_z A_2 + \partial_y A_3; ...$$

10. En donnant les indices 0 à 3 à nos coordonnées, nous avons simplement quelque chose du genre

$$dA = \left(\partial_{x^i} A_j - \partial_{x^j} A_i\right)dx^i dx^j$$

où nous nous sommes données quelques conventions pour ordonner correctement les paires $(i,j)$ et sommer les indices répétés.

ou encore, écrit dans les notations pédestres :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Séparer ainsi les coordonnées temporelles et spatiales nous oblige à alourdir inutilement nos notations, et pire, nous aveugler devant des évidences. Par le lemme de Poincaré, nous avons

$$d^2A = 0$$

En séparant péniblement les divers coordonnées, nous obtenons ce que l'on appelle les deux premières équations de Maxwell.

Voyons cela de plus près. Dans la dérivation de $dA$, nous voyons que seul les termes de la 2-forme $B$ produisent des 3-formes en $dxdydz$, ce que nous écrivons, en notation vectoriel, par

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0$$

En regroupant maintenant les autres termes en par exemple $dxdydt$, ..., nous trouvons trois autres identités que l'on écrit, en notation vectorielle, par

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

Un peu plus de travail sur les formes différentielles nous montrerai que les deux autres équations de Maxwell s'écrivent comme

$$d(*dA) = \mu_0(*J)$$

où $*$ est appelé l'opération de Hodge (nous verrons le sens géométrique plus bas) et $J$ est la 1-forme courant électrique : $J = -\rho dt + j_1 dx + j_2 dy + j_3 dz$.

## 1.7 théorème de Stockes.

Le théorème fondamental de l'analyse relie l'intégration de la dérivée d'une fonction aux valeurs de cette fonction aux bords :

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) \tag{1.5}$$

Ceci est en fait une forme particulière du théorème de Stockes. Donnons nous un domaine[11] $S$ de dimension $p$ dans un espace de dimension $n$. Une sphère pleine ( le point $P$ de coordonnées $(x, y, z)$ appartient à la sphère de rayon $R$ centrée sur l'origine si $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ ) est par exemple un domaine de dimension trois dans un espace de dimension 3. La boule ($z = 0$, $x^2 + y^2 < R^2$) est un domaine de dimension 2 dans un espace de dimension 3. Notons $\partial S$ la frontière du domaine $S$. La coque $x^2+y^2+z^2 = R^2$ du premier exemple et le cercle $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$ du deuxième exemple sont les frontières de leurs domaines. Le théorème de Stockes s'écrit

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega \tag{1.6}$$

11. Nous avons à supposer que le domaine est compact.

où $\omega$ est une $(p-1)$-formes. C'est pour cela par exemple que l'intégrale d'une fonction (une 1-forme) le long d'une courbe fermée est égale à l'intégrale de la rotationnelle de cette fonction (la $2-$forme dérivée) à travers la surface délimité par cette courbe. En réalité, c'est ce théorème que les physiciens appelle théorème de Stockes

$$\int_S \mathbf{rotf}.d\mathbf{s} = \int_{\partial S} \mathbf{f}.d\mathbf{l} \tag{1.7}$$

Mais nous n'avons pas à nous limiter là. Le flux d'un champ de vecteur à travers une surface $S$ (une $2-$forme ) égale à l'intégrale de la divergence de ce champ (la $3-$forme dérivée) dans le domaine $D$ délimité par la surface. En physique, nous écrivons cela comme

$$\int_S \mathbf{f}.d\mathbf{s} = \int_D \mathbf{divf}dV \tag{1.8}$$

Enfin, nous avons appris que si une fonction est le gradient d'une autre, alors son intégrale le long d'un chemin reliant les point $A$ et $B$ ne dépend pas du chemin :

$$\int_C \mathbf{grad}f.d\mathbf{l} = f(B) - f(A) \tag{1.9}$$

Comme vous le constatez, ces théorèmes de grad,rot et div ne sont que des applications du théorème de Stockes aux 1,2 et 3 formes dans un espace de dimension 3.

**Aperçu de la démonstration du théorème de Stockes.** La démonstration suit de très près la définition de la dérivée extérieure.

## 1.8 Intégration par partie.

Le théorème de Stockes nous donne la possibilité de généraliser l'intégration par partie

$$\int_I fg'dx = [fg]_I - \int_I f'gdx$$

à n'importe quelle dimension. Nous savons que

$$(d\omega_1)\omega_2 = d(\omega_1\omega_2) - (-1)^{\deg(\omega_1)}\omega_1(d\omega_2)$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\int_S (d\omega_1)\omega_2 &= \int_S d(\omega_1\omega_2) - (-1)^{\deg(\omega_1)}\int_S \omega_1(d\omega_2)\\ &= \int_{\partial S} \omega_1\omega_2 - (-1)^{\deg(\omega_1)}\int_S \omega_1(d\omega_2)\end{aligned}$$

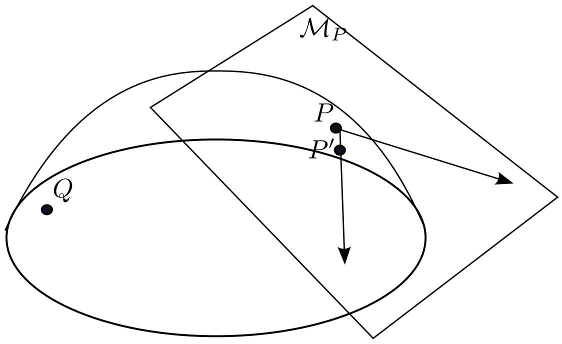



FIGURE 1.2 – L'espace (la variété différentielle) considéré ici est la surface de la sphère. L'espace tangent $\mathcal{M}_P$ au point $P$ où l'on définit les vecteurs est le plan tangent au point $P$. Tant que le point $P'$ est infiniment proche de $P$, nous pouvons le considérer appartenant en même temps au sphère et au plan, et utiliser un vecteur de $\mathcal{M}_P$ pour l'atteindre à partir de $P$ par un vecteur. Pour un point plus lointain comme $Q$, cela n'est plus possible.

## 1.9 Un peu de géométrie : vecteurs, 1-formes et leurs associations.

### 1.9.1 La théorie.

Jusque là, nous avons travaillé dans des espaces (que nous avons munis d'un système de coordonnées quelconque), nous y avons défini des vecteurs et des formes et nous avons développer notre théorie. Or, la plupart des espaces qui intéresse les physiciens, comme par exemple notre espace habituel à trois dimensions, possède en plus, une *métrique* : nous savons mesurer la "taille" d'un vecteur et la *distance* entre deux points. Ce concept de métrique était absent dans les sections précédentes ; cependant, toutes les théories physiques que nous élaborons dépendent des *distances* entre points et nous devons maintenant ajouter ce concept si nous voulons que notre mathématiques servent à quelque chose. Cette section nous servira à faire la connexion entre les formes différentielles et d'une part les opérateurs différentiels (gradient, rot, ...) vu au chapitre **??** et d'autre part les tenseurs vu au chapitre **??**. Le lecteur remarquera avec quel simplicité les formes automatisent les dérivations fastidieuses du chapitre **??**.

**Vecteurs.** Commençons par les vecteurs. Prenons un espace, c'est à dire un ensemble de points muni du concept de "proche"[12]. Nous pouvons associer de façon bijective cet espace, que nous appelons une *variété différentielle* (*manifold* en anglais) à un ensemble

12. Un ensemble de points n'a pas de structure, c'est un peu comme un sac de points. En se donnant le concept de "voisinage" et de proche, nous transformons ces points en une sorte de tissu, nous leur donnons une structure. On dit que nous avons muni notre espace d'une topologie. Noter que cela ne contient pas encore le concept de distance, qui est un concept beaucoup plus précis et restrictif que le concept de "proche". En topologie, il n'y a pas de distinction entre cube et sphère, ce sont le même type d'objet.

$\mathbb{R}^n$, et nous appelons alors $n$ la dimension de l'espace. Cette association s'appelle "se donner un système de coordonnées" et nous repérons alors un point $P$ par ses coordonnées $(x^1, x^2, ...x^n)$. A chaque points $P$ de l'espace, nous pouvons définir des *vecteurs* $\mathbf{v} = \vec{PP'}$ entre ce point et l'ensemble des points $P'$ (infiniment) proche de lui. L'ensemble $\mathcal{M}_P$ de ces vecteurs $\{\mathbf{v}\}_P$ est appelé l'espace tangente du point $P$. Nous pouvons utiliser notre système de coordonnées pour définir une base dans cet espace vectoriel. Par exemple, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ...Ainsi, pour le point le point $P = (x^1, x^2, ...x^n)$ et $P' = (x^1 + h^1, x^2 + h^2, ...x^n + h^n)$ (où nous supposons les $h^i$ petit), nous pouvons écrire $P' = P + h^i\mathbf{e}_i$ (figure 1.2). Notez que par convention, un indice répété une fois en haut une fois en bas dénote une sommation. Cela nous évite d'alourdir les notations en traînant le symbole $\sum$ partout.

Notez que cette définition de vecteur ne contient pour l'instant aucune notion de la norme d'un vecteur (ceci viendra bientôt) ; elle est basée purement sur le système de coordonnée choisi.

**Formes.** Passons maintenant aux formes. Une 1-forme est une application linéaire qui s'applique à un vecteur et produit un nombre. L'ensemble $\mathcal{M}_p^*$ des 1-formes s'appliquant aux vecteurs de $\mathcal{M}_p$ forme lui même un espace vectoriel que nous appelons l'espace cotangente. La forme $dx^i$ par exemple est telle que $dx^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$ ; ce sont ces formes (sous le nom de $dx$ ou $dy$ ) que nous utilisions aux sections précédentes. Remarquez que comme nous avons un système de coordonnées, nous pouvons associer à chaque vecteur $\mathbf{v} = h^i\mathbf{e}_i$ une 1-forme $\omega = h_i dx^i$ où $h_i = h^i$. Cependant, cette association est quelque peu artificielle est dépend de notre choix de système de coordonnées. Tous les concepts géométriques sont indépendant des systèmes de coordonnées : ces derniers sont juste une aide pour la manipulation, mais ne doivent pas nous cacher les significations géométriques.

Notons que nous pouvons donner une définition un peu plus formelle des 1-formes dérivées des fonctions. Soit une fonction $f(.)$ définie sur notre variété différentielle. La 1-forme *df* est définie, au point $P$, par son action sur un vecteur quelconque $\mathbf{v} \in \mathcal{M}_P$ par

$$df(\mathbf{v}) = \frac{1}{\epsilon}\left(f(P + \epsilon\mathbf{v}) - f(P)\right)$$

quand $\epsilon \to 0$. Prenons par exemple la fonction $f(P) = x^i$, *i.e.* la fonction qui associe à un point $P$ sa $i$-ème coordonnée. Nous voyons que pour la forme $dx^i$, nous avons $dx^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$.

**Distance, produit scalaire et le tenseur métrique.** Passons maintenant au concept qui transforme un espace topologique en un espace métrique et qui nous permet de distinguer une sphère d'une ellipsoïde : le concept de distance et de produit scalaire [13]. Nous avons déjà rencontré ce concept au début de ce cours (chapitre **??**) et nous connaissons sa

13. Le concept de distance est lui même contenu dans le concept des invariants. Se donner des *invariants*, comme le fait par exemple que tourner un bâton ne change pas sa taille, c'est se donner une distance. A la fin de XIX-ème siècle, la géométrie a été redéfinie en ces termes par des mathématicien tels que Felix Klein.

définition axiomatique : le produit scalaire associe à deux vecteurs, de façon linéaire, un *nombre*. En géométrie, se donner un produit scalaire fixe la structure de l'espace. Le produit scalaire $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ entre deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est indépendant du système de coordonnées. Cependant, si nous nous sommes donnés un système de coordonnées et un produit scalaire, nous pouvons exprimer le produit scalaire entre le vecteur $\mathbf{u} = h^i \mathbf{e}_i$ et le vecteur $\mathbf{v} = k^i \mathbf{e}_i$ par

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = g_{ij} h^i k^j$$

Les quantités $g_{ij}$ sont appelés les éléments du tenseur métrique $g$. Si on choisit un autre système de coordonnées, leurs valeurs changent de façon à laisser invariant $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. En général, $g$ dépend du point $P$ de l'espace. La distance entre deux point $P$ et $P'$ infiniment proche est donnée par

$$d(P, P') = \left\| \vec{PP'} \right\| = \sqrt{\left\langle \vec{PP'}, \vec{PP'} \right\rangle}$$

**Exemple 1.5** Soit un système de coordonnées $(x^1, x^2)$. Soit $\mathbf{u} = h^i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{v} = k^i \mathbf{e}_i$ deux vecteurs au point $P = (x^1, x^2)$. Le produit scalaire

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = h^i k^j$$

qui est indépendant du point $P$ définit un espace plat muni de coordonnées cartésiennes. Ici, le tenseur métrique est l'identité $g_{ij} = \delta_{ij}$. De même, si nous pouvons munir un espace de ce produit scalaire, nous disons que nous avons un espace plat muni de coordonnées cartésienne.

**Exemple 1.6** Soit un système de coordonnées $(x^1, x^2)$. Soit $\mathbf{u} = h^i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{v} = k^i \mathbf{e}_i$ deux vecteurs au point $P = (x^1, x^2)$. Le produit scalaire

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = h^1 k^1 + \left(x^1\right)^2 h^2 k^2$$

dépend cette fois explicitement du point de l'espace $P$. La distance $d$ entre le point $P$ et le point voisin $P' = (x^1 + h^1, x^2 + h^2)$ est donné par

$$d(P, P') = \left(h^1\right)^2 + (x^1)^2 \left(h^2\right)^2$$

Ici, le tenseur métrique est

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 \end{pmatrix}$$

Si nous avions utilisé la notation $x^1 = r$ et $x^2 = \theta$, le lecteur aura immédiatement reconnu que nous sommes en train d'utiliser des coordonnées polaires.

Il est important de noter que dans ce système de coordonnées, au point $P = (r, \theta)$, nous avons pour les vecteurs de base $\|\mathbf{e}_r\| = 1$ et $\|\mathbf{e}_\theta\| = r$ : un des vecteurs n'est pas normé. Nous pouvons bien sûr choisir d'autres vecteurs de base normés, comme par exemple $\mathbf{e}'_\theta = (1/r)\mathbf{e}_\theta$, mais le choix imposé par le système de coordonnées n'est pas normé.

**§ 1.4** Donner le tenseur métrique à trois dimensions pour les coordonnées cylindriques et sphériques.

**§ 1.5** Sur la surface de la sphère unité où les points sont repéré par $(\theta, \phi)$, trouver le tenseur métrique hérité de la distance euclidienne.

**§ 1.6** Démontrer que même si le tenseur métrique n'est pas symétrique, nous pouvons toujours le symétriser en choisissant

$$g'_{ij} = (g_{ij} + g_{ji})/2$$

et que cette symétrisation ne change pas le produit scalaire. Ceci est la raison pourquoi on choisit toujours un tenseur métrique symétrique.

**Association forme-vecteur.** Nous sommes maintenant en mesure d'établir une association intrinsèque entre les éléments de $\mathcal{M}_P$ et $\mathcal{M}_P^*$ : à un vecteur $\mathbf{u}$, nous associons la forme $\omega = \langle \mathbf{u}, . \rangle$. L'action de cette forme sur un vecteur $\mathbf{v}$ est

$$\omega(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

Comme le produit scalaire ne dépend pas du choix du système de coordonnées, cette association l'est également. Cette association est souvent appelée isomorphisme musicale, et on note $\omega = \mathbf{u}^\flat$. En calcul tensoriel, on appelle cette opération "abaissement d'indice". Dans les notations de Dirac en mécanique quantique, un vecteur est noté par un ket, comme par exemple $|u\rangle$, et sa forme associé par un *bra* $\langle u|$. L'opération inverse, l'association d'un vecteur à une forme, est notée $\mathbf{u} = \omega^\sharp$. En calcul tensoriel, on appel cela "élévation d'indice".

Jusque là, nous voyions les formes comme des objets agissant sur des vecteurs, mais la définition ci-dessus nous permet de rendre cette opération complètement symétrique et considérer les vecteurs comme des objets agissant sur des 1-formes. Ainsi, $\mathbf{v}(\omega) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ où $\omega = \mathbf{u}^\flat$. De même, le produit scalaire dans l'espace cotangente se définit à partir de sa définition dans l'espace tangente : $\langle \omega, \eta \rangle = \left\langle \omega^\sharp, \eta^\sharp \right\rangle$.

Nous pouvons expliciter cette association dans un système de coordonnés quelconque. Soit le vecteur $\mathbf{u} = h^i \mathbf{e}_i$ et sa forme associée $\omega = \mathbf{u}^\flat = \alpha_i \tilde{e}^i$. Pour éviter les confusion entre vecteur, nombre et forme, nous mettons pour l'instant un tilde sur les éléments de base des formes : $\tilde{e}^j(\mathbf{e}_i) = \delta_i^j$. Soit maintenant un vecteur $\mathbf{v} = k^i \mathbf{e}_i$. Par définition des formes et du produit scalaire, nous avons

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{v}) &= \alpha_i k^i \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= g_{ij} h^j k^i \end{aligned}$$

En comparant ces deux expressions, nous voyons que nous devons avoir

$$\alpha_i = g_{ij} h^j$$

Si nous connaissons les composants du vecteur, les composants de sa forme associée s'obtiennent par une simple multiplication tensorielle [14]. Il est d'ailleurs d'usage de noter

14. En langage courant, on obtient un vecteur ligne en multipliant une matrice et un vecteur colonne

les composant de la forme par le même symbole que les composant de son vecteur associé, mais avec un indice abaissée. Ainsi, à la place de $\alpha_i$, nous aurions du utiliser $h_i$ et écrire la relation comme $h_i = g_{ij}h^j$.

En inversant cette relation, nous pouvons trouver les composants du vecteur si nous connaissons les composants de la 1-forme :

$$h^i = g^{ij}h_j$$

où les $g^{ij}$ sont les éléments de l'inverse du tenseur métrique $g^{-1}$. De façon symétrique, le produit scalaire entre deux formes de composantes $h_i$ et $k_i$ est donnée par $g^{ij}h_ik_j$.

Dans la plupart des cas, nous utilisons un système de coordonnées où le tenseur métrique est diagonale : $g_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Dans ce cas, le tenseur inverse s'obtient par une simple inversion des nombres : $g^{ii} = 1/g_{ii}$ et le passage des composants de formes au vecteur s'obtient facilement.

**Exemple 1.7** Dans l'espace de Minkowski de la relativité restreinte de dimension 4, en coordonnée cartésiennes, le tenseur (pseudo-)métrique est diagonale et donnée par $g_{00} = -1$ ; $g_{ii} = 1$ pour $i > 0$. Au quadri-vecteur $(A_0, A_1, A_2, A_3)$ est associée la quadri 1-forme $(-A_0, A_1, A_2, A_3)$.

### 1.9.2 Application au calcul vectoriel.

En physique, nous manipulons constamment des objets que l'on appelle gradient, rotationnel, divergence et laplacien. Au chapitre **??**, nous avions vu comment obtenir l'expression de ces objets dans un système de coordonnées quelconque. Nous pouvons maintenant les revisiter à travers le concept des formes différentielles et de façon beaucoup plus générale. Cependant, pour ne pas alourdir trop les expressions, nous nous contentons de cas où le tenseur métrique est symétrique et les coordonnées curvilignes sont orthogonales.

**Le gradient.** Soit une variété différentielle où nous avons une fonction intrinsèque $f(.)$. Par fonction intrinsèque, nous entendu une fonction qui à chaque point de l'espace associe un nombre, indépendemment du système de coordonnées choisit. Par exemple, une fonction qui mesure la courbure locale de l'espace, ou en physique, une fonction qui mesure la densité ou la température en un point.

Si nous connaissons la valeur de la fonction au point $P$, sa valeur au point $P'$ proche est donnée par

$$f(P') = f(P) + \nabla f.\vec{PP'}$$

où $\nabla f$ est appelé (vecteur) gradient. Ce vecteur est celui associé à la forme $df$. L'expression des composants de $\nabla f$ dans n'importe quel système de coordonnées s'obtient facilement si nous comprenons son association avec les formes.

Donnons nous un système de coordonnées orthogonales $x^i$ et le tenseur métrique $g_{ij}$ diagonal dans ce système. Nous avons

$$df = (\partial f/\partial x^i)dx^i$$

Nous avons donc, pour les composantes du vecteur gradient,

$$(\nabla f)^i = g^{ij}(\partial f/\partial x^j)$$

En coordonnées orthogonales, où $g_{ij} = g^{ij} = 0$ si $i \neq j$, et $g^{ii} = 1/g_{ii}$, nous avons[15]

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{g_{ii}} \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathbf{e}_i \tag{1.10}$$

Remarquez que la base naturelle est en général non-normée : $\|\mathbf{e}_i\| = \sqrt{g_{ii}}$. Si nous choisissons une base normée $\mathbf{e}'_i = (1/\sqrt{g_{ii}})\mathbf{e}_i$, nous avons alors

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathbf{e}'_i \tag{1.11}$$

Dans la plupart des problèmes de physique, nous utilisons des bases normées et l'expression (1.11) est celle qui est le plus rencontrée.

**Exemple 1.8** A deux dimensions et en coordonnées polaires $(r, \theta)$, nous avons $g_{rr} = 1$ et $g_{\theta\theta} = r^2$. Le gradient est donc

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta$$

où $\mathbf{u}_r$ et $\mathbf{u}_\theta$ sont les vecteurs normés radial et orthoradial.

*§ 1.7* Donner l'expression du gradient en coordonnées cylindriques et sphériques.

**Le rotationnel.** Soit un champ de vecteurs intrinsèque $\mathbf{v}(P)$ dans notre espace. Nous parlons par exemple du champ de vitesse dans un fluide ou du champ électromagnétique. Nous souhaitons calculer son rotationnel. Le rotationnel n'est pas un vecteur, mais un bi-vecteur. Dans l'espace à trois dimension, nous pouvons faire une bijection entre les bi-vecteurs et les vecteurs, et c'est pourquoi, à cette dimension, nous parlons du vecteur rotationnel. Pour rester simple, nous nous contentons de dimension trois ici et laissons la généralisation au lecteur à travers un exercice. Le développement consiste à (i) passer du vecteur à la 1-formes ; (ii) dériver la forme ; (iii) revenir de l'espace des deux formes à l'espace des bi-vecteurs.

Au vecteur $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$, nous associons la 1-forme

$$\omega = \mathbf{v}^\flat = \sum g_{ii} v^i \tilde{e}^i$$

où nous avons noté $\tilde{e}^i$ à la place de $dx^i$ pour plus de symétrie. La dérivation extérieure de cette forme nous donne

$$d\omega = \left( \frac{\partial(g_{22}v^2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(g_{11}v^1)}{\partial x^2} \right) \tilde{e}^1 \wedge \tilde{e}^2 + \text{permut. circ.}$$

15. Nous utilisons explicitement le symbole $\sum$ quand il peut y avoir ambiguïté.

le bi-vecteur associée à cette 2-forme est donc

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\mathbf{v} = \frac{1}{g_{11}g_{22}}\left(\frac{\partial(g_{22}v^2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(g_{11}v^1)}{\partial x^2}\right)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2 + \text{permut. circ.} \tag{1.12}$$

Notez à nouveau que le rotationnel est donné ici dans une base non-normée. Si nous utilisons une base normée $\mathbf{e}'_i = (1/\sqrt{g_{ii}})\mathbf{e}_i$, alors le champs de vecteur s'écrit $\mathbf{v} = v'^i\mathbf{e}'_i$ où $v^i = v'^i/\sqrt{g_{ii}}$. En récrivant l'expression (1.12) dans cette nouvelle base, nous avons

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}\left(\frac{\partial(\sqrt{g_{22}}v'^2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(\sqrt{g_{11}}v'^1)}{\partial x^2}\right)\mathbf{e}'_1\wedge\mathbf{e}'_2 + \text{permut. circ.} \tag{1.13}$$

**Exemple 1.9** En coordonnées cylindrique $(r,\theta,z)$, nous avons $g_{rr} = 1$ et $g_{\theta\theta} = r^2$ et $g_{zz} = 1$. Le composant du rotationnel selon $\mathbf{u}_r\wedge\mathbf{u}_\theta$ (que l'on associe à la composante selon le vecteur $\mathbf{u}_z$ ) est donc

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\mathbf{v}\right)_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\,v^\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(v^r)}{\partial\theta}\right)$$

*§ 1.8* Donner l'expression complète du rotationnel en cylindrique et sphérique.

**La divergence.** Le calcul de la divergence procède de la même façon que précdément. Il faut seulement noter que la divergence est définie dans un $n-$volume et est le résultat de l'intégration d'un $n-1$ vecteur. Considérons, à trois dimensions, un bi-vecteur

$$\boldsymbol{r} = v^3\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2 + v^1\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3 + v^2\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1$$

auquel on associe un 2-forme

$$\omega = g_{11}g_{22}v^3\tilde{e}^1\wedge\tilde{e}^2 + \text{permut. circ.}$$

La dérivée de cette forme nous donne la 3-forme

$$d\omega = \left(\frac{\partial(g_{11}g_{22}v^3)}{\partial x^3} + \frac{\partial(g_{22}g_{33}v^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(g_{11}g_{33}v^3)}{\partial x^2}\right)\tilde{e}^1\wedge\tilde{e}^2\wedge\tilde{e}^3$$

et un retour dans l'espace des vecteur produit

$$\mathrm{div}\boldsymbol{r} = \frac{1}{g_{11}g_{22}g_{33}}\left(\frac{\partial(g_{11}g_{22}v^3)}{\partial x^3} + \frac{\partial(g_{22}g_{33}v^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(g_{11}g_{33}v^3)}{\partial x^2}\right)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$$

Comme précédemment, cette expression est pour des vecteurs de base non-normés. Pour des vecteur normés, on trouve l'expression habituel

$$\mathrm{div}\boldsymbol{r} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}\left(\frac{\partial(\sqrt{g_{11}g_{22}}v^3)}{\partial x^3} + \frac{\partial(\sqrt{g_{22}g_{33}}v^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(\sqrt{g_{11}g_{33}}v^3)}{\partial x^2}\right)\mathbf{e}'_1\wedge\mathbf{e}'_2\wedge\mathbf{e}'_3$$

Le triple produit vectoriel, au signe près vaut une fois le volume unité. Le signe dépend de l'orientation de l'espace. Bien sûr, un 3-vecteur ne peut pas valoir un scalaire, mais l'espace des 3-vecteurs est de dimensions 1, et nous les associons donc aux scalaires.

## 1.10 L'opérateur de Hodge.

**$n-$forme volume.** Un opérateur différentiel fondamental dont nous n'avons pas encore parlé est le laplacien. Nous savons qu'en analyse vectoriel, cet opérateur est relié à une *dérivée seconde*, mais nous ne pouvons évidement pas l'utiliser tel quel, puisque d'après le lemme de Poincaré, pour une $k-$forme $\omega$, $d(d\omega) = 0$. L'opérateur de Hodge nous permet de donner un sens précis au "laplacien" pour les $k$-forme.

Dans l'espace à $n$ dimension, il existe une $n-$forme fondamentale que nous appelons *volume*. Soit une région de l'espace $D$ et soit une fonction $f()$ tel que $f(P) = 1$si $P \in D$ et $f(P) = 0$ sinon. Alors

$$\int f(P)\phi$$

mesure le *volume* de la région $D$. Dans un espace plat muni de coordonnées cartésiennes $x^i$, la $n-$forme volume est simplement

$$\phi = dx^1 ... dx^n$$

Dans un espace muni de coordonnées curviligne et un tenseur métrique $g$, au $n-$vecteur $\mathbf{e}'_1 \wedge \mathbf{e}'_2 ... \wedge \mathbf{e}'_3$ correspond la $n-$forme volume

$$\phi = \sqrt{|\det g|} dx^1 ... dx^n$$

où $\det g$ et le déterminant du tenseur métrique, autrement dit, dans les notations de la sous section précédente où $g$ est supposé diagonal,

$$\det g = g_{11} g_{22} ... g_{nn}$$

En coordonnées cylindrique, $\det g = r^2$ et nous déduisons donc que $\phi = r dr d\theta dz$, ce que nous aurions également pu obtenir par changement de coordonnées en partant de $\phi = dxdydz$. De même, en coordonnées sphérique, $\phi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$.

**L'étoile de Hodge.** L'opérateur de Hodge $\star$ associe (de façon unique et linéaire) à une $k-$forme $\omega = dx^1 ... dx^k$ une $(n-k)-$forme $\star\omega$ telle que

$$\eta(*\omega) = \langle \eta, \omega \rangle \, \phi \ \ \forall \eta \tag{1.14}$$

En gros, $*\omega$ complète $\omega$ pour former (à un facteur près), le $n-$forme volume. L'association d'un vecteur à un bi-vecteur telle que nous le faisons pour le rotationnel est en faite une telle opération.

Nous avons pas mal utilisé cet opérateur sans lui donner un nom. Prenons l'espace à $n = 3$ muni de coordonnées cartésiens où $g = 1$. Alors, par exemple,

$$*dx = dydz \ ; \ *dy = dzdx \ ; \ *dz = dxdy$$

Nous voyons alors que $dx^i(*dx^i) = 1dxdydz$ pour $i = 1, 2, 3$. La seule petite complication est de bien gérer le signe, c'est à dire le degrés de permutation que cela nous impose. De même, il est facile de voir que $*1 = dxdydz$ et $*dxdydz = 1$. Listons quelques propriétés de $*$ :

1. $*$ est linéaire.
2. $*(f\omega) = f(*\omega)$ où $f$ est une fonction et $\omega$ une $k-$forme.
3. $*1 = \phi$ et $*\phi = 1$

La relation (1.14) est en fait une recette explicite pour calculer $*\omega$. Prenons une 1-forme $dx^k$ et calculons $*dx^k$. D'abord, nous voyons que

$$dx^i(*dx^k) = 0 \ \text{si}\, i \neq k$$

et par ailleurs,

$$dx^k(*dx^k) = \left\langle dx^k, dx^k \right\rangle \phi = \frac{1}{g_{kk}} \sqrt{|\text{det}g|} dx^1 ... dx^n$$

Nous en déduisons donc que

$$*dx^k = (-1)^{k+1} \frac{1}{g_{kk}} \sqrt{|\text{det}g|} dx^1 ... dx^{k-1} dx^{k+1} ... dx^n$$

**Exemple 1.10** Coordonnées polaires

En coordonnées polaire $(r, \theta, z)$, nous avons $g_{rr} = 1$, $g_{\theta\theta} = r^2$ et $g_{zz} = 1$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} *dr &= r d\theta dz && (1.15) \\ *d\theta &= -\frac{1}{r} dr dz && (1.16) \\ *dz &= r dr d\theta && (1.17) \end{aligned}$$

**Exemple 1.11** Coordonnées sphériques

En coordonnées sphérique $(r, \theta, \phi)$, nous avons $g_{rr} = 1$, $g_{\theta\theta} = r^2$ et $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta$ et $\sqrt{|\text{det}g|} = r^2 \sin\theta$ Nous avons donc

$$\begin{aligned} *dr &= r^2 \sin\theta d\theta d\phi && (1.18) \\ *d\theta &= -\sin\theta dr d\phi && (1.19) \\ *d\phi &= \frac{1}{\sin\theta} dr d\theta && (1.20) \end{aligned}$$

**Le Laplacien.** Prenons maintenant une fonction $f(x, y, z)$, c'est à dire une $0-$forme. Nous avons alors

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ *df &= \frac{\partial f}{\partial x} dy dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz dx + \frac{\partial f}{\partial z} dx dy \\ d(*df) &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

Et nous voyons que $d(*df)$ nous donne bien le laplacien sous forme d'une $3-$forme. En d'autres termes,

$$\Delta f = *d * df$$

En notant $\delta = *d$, nous voyons qu'en langage de forme différentielle, $\Delta f = \delta^2 f$. Par ailleurs, il suffit de connaître $*dx^i$ dans un système de coordonnées pour pouvoir dériver aisément l'expression du Laplacien dans ce système.

**Exemple 1.12** Coordonnées polaires

Soit une fonction $f(r, \theta, z)$. Nous avons

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

et donc, en utilisant les expressions (1.15-1.17), nous avons

$$*df = r\frac{\partial f}{\partial r}d\theta dz - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}drdz + r\frac{\partial f}{\partial z}drd\theta$$

et en dérivant une fois de plus

$$\begin{aligned} d(*df) &= \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right\}drd\theta dz \\ &= \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right\}rdrd\theta dz \end{aligned}$$

Pour passer de la première ligne à la seconde, nous avons simplement sorti $r$ de $\{\}$ ; ainsi, le terme restant en dehors de $\{\}$ a exactement la forme de $n-$volume $\phi$. Comme $*\phi = 1$, nous en déduisons, en appliquant un $*$ supplémentaire, que le terme entre $\{\}$ dans la seconde ligne est le Laplacien.

**Exemple 1.13** Coordonnées sphériques

Soit une fonction $f(r, \theta, \phi)$. Nous avons

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi}d\phi$$

En utilisant les expressions (1.18-1.20), nous avons

$$*df = r^2\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}d\theta d\phi - \sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}drd\phi + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}drd\theta$$

En dérivant une fois de plus et en mettant $r^2\sin\theta$ en facteur, nous avons

$$d * df = \left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\right\}r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

Le terme entre $\{\}$ est donc le Laplacien en coordonnées sphérique.

***§ 1.9*** Donner l'expression complète de Laplacien dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales quelconque.

## 1.11 Quelques applications.

### 1.11.1 Équation de conservation.

Vous rencontrez cette équation partout en physique, sous des formes diverses et variées. Elle dit simplement que la variation de “quelque chose” dans un volume égale la quantité de ce “quelque chose” qui entre dans ce volume moins la quantité de ce “quelque chose” qui en sort. Le “quelque chose” peut être la concentration d'une substance, l'énergie emmagasinée dans le volume, une probabilité de présence, ... [16] Les systèmes qui obéissent à cette loi sont dits *conservatif*s. La quantité entrante moins la quantité sortante se dit flux. Notons par $\rho$ le “quelque chose” et par $\mathbf{J}$ son flux. Appliquée à un volume infinitésimal $dxdydz$, l'équation de conservation s'écrit

$$\partial\rho/\partial t + \mathbf{div}\mathbf{J} = 0 \tag{1.21}$$

Si nous parlons d'un fluide en mouvement, alors $\rho(\mathbf{x})$ est la concentration en un point de l'espace, $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ la vitesse du fluide et $\mathbf{J} = \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Dans le cas d'une substance qui diffuse, le flux $\mathbf{J}$ est proportionnel au gradient de la concentration [17] (la chaleur diffuse du chaud vers le froid, l'encre se dilue dans l'eau,...) $\mathbf{J} = -K\mathbf{grad}\rho$, ce qui, réinjecté dans l'équation de conservation, nous donne l'équation de diffusion $\partial\rho/\partial t = K\nabla^2\rho$.

En langage des formes, cette équation acquiert une interprétation géométrique. Prenons d'abord le cas de l'espace à une dimension spatiale et une dimension temporelle, et considérons un élément infinitésimal $dt, dx$ (les deux cotés d'un carré dans l'espace-temps, si vous voulez) et la forme $\omega = \rho dx - Jdt$ [18]. L'équation de conservation n'est alors rien d'autre que

$$d\omega = 0$$

A 3+1 dimensions (ou plus si affinité), il faut considérer la forme

$$\omega = \rho dxdydz - (J_x dydz + J_y dzdx + J_z dxdy)dt$$

Cette forme est analogue à ce qu'en physique nous appelons un quadri-vecteur. Nous verrons plus bas une application de ce concept au champ électromagnétique.

### Exercices.

***§ 1.10*** **Périmètre et surface.** Soit $A$ l'aire enfermée par une courbe $\mathcal{C}$. Démontrer que nous avons

$$A = (1/2)\int_{\mathcal{C}} xdy - ydx$$

16. Le quelque chose peut être l'argent d'une entreprise, et les comptables sont responsable, sur leur denier personnel, de faire respecter cette loi. L'étudiant en physique perd au plus quelques points à l'examen.
17. Cela se démontre facilement en physique statistique et s'appelle la réponse linéaire.
18. Le signe “-” vient de notre convention de compter en négatif le flux entrant. Cela paraît aussi arbitraire que la charge de l'électron. Historiquement, cela vient du fait que la surface est orientée pour que la normale pointe vers l'extérieur.

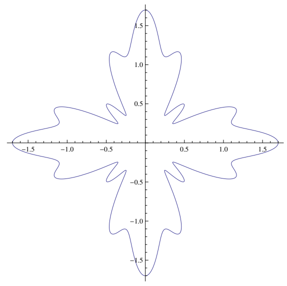


FIGURE 1.3 – Une *feuille* donnée par l'équation $r = 1 + (1/2)\cos(4\theta) + (1/5)\cos(16\theta)$

En déduire que l'aire d'une ellipse est $\pi ab$, où $a$ et $b$ sont les axes majeur et mineur. Comment cette expression est reliée à l'expression habituelle

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

de la surface entre une courbe et l'axe $x$ ?

***§ 1.11*** **Air d'une courbe fermée.** Nous souhaitons calculer l'air enfermée par une courbe $\mathcal{C}$ donnée en coordonnées polaires par l'équation

$$r(\theta) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(n\theta)$$

dont un exemple est donné par la figure 1.3.

1. Démontrer que $\int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta)d\theta = \pi$ si $n \neq 0$ et $2\pi$ si $n = 0$. De même, démontrer que $\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta = 0$ si $m \neq n$.
2. Démontrer que la 2-forme différentielle $\omega = dxdy$ dérive de la 1-forme $\eta = (1/2)(xdy - ydx)$.
3. Donner l'expression de $\omega$ et $\eta$ en coordonnées polaires.
4. Vérifier qu'en coordonnées polaires, nous avons bien $\omega = d\eta$.
5. En utilisant la forme polaire de ces formes, et en utilisant le théorème de Stockes, démontrer que l'air enfermée par la courbe vaut

$$A = \pi \left( a_0^2 + (1/2) \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \right)$$

***§ 1.12*** **Volume.** Démontrer que la 3-forme volume $dxdydz$ dérive de la 2-forme

$$\frac{1}{3}\left(xdydz + ydzdx + zdxdy\right)$$

en déduire le volume d'une sphère, d'un ellipsoïde de révolution et d'un ellipsoïde générale.

***§ 1.13*** **Association bi-vecteur, 2-forme.** Dans un espace à 3 dimensions, donner la relation entre bi-vecteur et 2-formes en en coordonnées généralisées orthogonale. Utiliser ce résultat pour trouver l'association en coordonnés cylindriques et sphériques.

*§ 1.14* **Opérateurs différentielles en analyse vectorielle.** Trouver l'expression du laplacien à $n = 3$ en coordonnées généralisées orthogonales. Utiliser ce résultat pour trouver ce résultat en coordonnées cylindriques et sphériques.

*§ 1.15* **D'Alembertien.** Dans l'espace-temps ($n = 4$), la 4-forme volume est donnée en coordonnées cartésienne par

$$\phi = -dtdxdydz$$

Étant données la fonction $f(t, x, y, z)$, donner l'expression de $d(*df)$. C'est ce que l'on appelle couramment le D'Alembertien qui gouverne toutes les équations d'ondes.

*§ 1.16* **Équations de Maxwell.** En partant du lagrangien (**??**), faire une variation sur $A$, intégrer par partie les formes résultantes pour déduire les équations du Maxwell en présence du champ.

quelques exemples d'intégration des formes.
est ce que $dw = 0$ implique $w = d\alpha$? exemple pratique sur le rot.
équation de maxwell complète
transformation de Lorentz et les équations de Maxwell, la modification du courant,
relativité
démonstration de stockes pour les deux formes.
l'opérateur *, le laplacien $d(*df)$, en déduire le laplacien en coordonnées curviligne, le lien entre la minimisation de $df \wedge *df$ et $d(*df) = 0$. Éventuellement, si possible, faire le lien avec le chapitre précédent et le calcul des surfaces minimales.
Peut être faire une vague introduction à la géométrie des surfaces et la relation avec les courbures.
Faire le lien avec les tenseurs antisymétriques du prochain chapitre.