

1 Calcul des perturbations.

Le calcul des perturbations n'est pas une méthode scientifique utilisée dans les hôpitaux psychiatriques pour évaluer les symptômes d'un patient. Il existe peu de problèmes exactement solubles en physique et il faut souvent recourir aux techniques d'approximations. Une des techniques les plus utilisées est celle qui porte le nom de ce chapitre. L'idée de base est une généralisation du développement de Taylor : si nous connaissons la valeur d'une fonction au point x_0 , nous pouvons calculer, sous certaines conditions, la valeur de la fonction au point $x_0 + \epsilon$:

$$f(x_0 + \epsilon) = f(x_0) + A_1\epsilon + A_2\epsilon^2 + \dots$$

Le développement de Taylor nous fournit en plus un moyen de trouver les coefficients A_i : ce sont, si elles existent, les i -ème dérivées de la fonction f au point x_0 , divisé par $i!$. De plus, si ϵ est petit et que nous ne sommes pas très exigeant quant à la précision, nous pouvons nous contenter du premier ou des deux premiers termes du développement. Le calcul des perturbations généralise cette démarche au calcul des solutions des équations différentielles, des racines des polynômes, des équations intégrales, des vecteurs propres des matrices, ... C'est le premier outil utilisé par le physicien qui tombe sur un problème ardu dont la solution n'est pas connue : si on connaît un problème proche dont la solution est connue, on peut tenter les perturbations. Mentionnons tout de suite que cette technique ne marche pas toujours. On tombe parfois (souvent), sur des perturbations dites singulières et il faut alors sortir l'artillerie lourde. Les perturbations qui se traitent facilement sont dites régulières. Nous nous intéresserons surtout aux perturbations régulières, mais dirons quelques mots sur les perturbations singulières.

1.1 Les perturbations régulières.

La meilleure façon de s'habituer aux calcul des perturbations est à travers des exemples.

Les racines d'un polynômes. Supposons que nous ne connaissons pas la résolutions des équations algébriques de second ordre, mais que nous savons résoudre l'équation $x^2 - x = 0$, dont les racines sont $x_0 = 0, 1$. Nous cherchons la solution de l'équation

$$x^2 - x + \epsilon = 0 \tag{1.1}$$

où nous supposons ϵ petit. Cherchons la solution sous forme de

$$X = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots \tag{1.2}$$

1 Calcul des perturbations.

Nous cherchons la solution sous cette forme puisque nous pensons que comme ϵ est petit, la nouvelle racine ne doit pas être trop loin de l'ancienne, et l'écart doit être justement fonction de ϵ : pour $\epsilon = 0$, nous devons trouver la solution originale. Nous connaissons déjà x_0 , et il nous faut trouver une méthode pour calculer x_1, x_2, \dots . Injectons maintenant (1.2) dans (1.1) et regroupons les en fonction des puissances d' ϵ :

$$(x_0^2 - x_0) + [(2x_0 - 1)x_1 + 1]\epsilon + (x_1^2 + 2x_0x_2 - x_2)\epsilon^2 + \dots = 0 \quad (1.3)$$

Le membre de droite de l'équation ci-dessus est un polynôme en ϵ et il est uniformément nul. Nous en déduisons donc que tous les coefficients du polynôme doivent être nuls, c'est à dire :

$$x_0^2 - x_0 = 0 \quad (1.4)$$

$$(2x_0 - 1)x_1 + 1 = 0 \quad (1.5)$$

$$x_1^2 + 2x_0x_2 - x_2 = 0 \quad (1.6)$$

$$\dots = 0$$

L'équation (1.4), donnée par le coefficient de ϵ^0 et appelé le terme d'ordre zéro, est notre équation originale non perturbée que nous savons résoudre. L'équation (1.5) nous donne x_1 :

$$x_1 = 1/(1 - 2x_0)$$

Comme nous connaissons déjà x_0 , nous déterminons facilement que $x_1 = 1$ ou -1 . L'équation (1.6) nous détermine le coefficient x_2 :

$$x_2 = \frac{x_1^2}{1 - 2x_0}$$

et donc $x_2 = 1$ ou -1 . Nous pouvons continuer ainsi (cela dépend de notre patience) et trouver les coefficient x_n . Ce que nous devons remarquer est que : (i) pour déterminer x_k , nous n'avons que besoin des x_{k-1}, x_{k-2}, \dots (ii) l'équation qui détermine x_k est *linéaire* en x_k , c'est à dire ne comporte que des puissances unité de x_k . C'est deux points nous permettent assez aisément de calculer la solution aussi précisément que l'on souhaite. Nous avons donc, pour les deux racines de l'équation (1.1),

$$X_1 = 0 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots \quad (1.7)$$

$$X_2 = 1 - \epsilon - \epsilon^2 + \dots \quad (1.8)$$

Dans ce cas précis, nous connaissons la solution exacte

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2}$$

Un développement de Taylor de cette dernière nous rassure sur l'exactitude des résultats (1.7,1.8).

1 Calcul des perturbations.

Généralisation. Nous pouvons généraliser l'approche ci-dessus, sans la formaliser plus : on cherche la solution d'un problème avec perturbation comme un développement en puissance de la perturbation. Il faut alors que les coefficients de chaque puissance de la perturbation soit nulle. Le mieux reste encore d'illustrer cela à travers des exemples.

Recherche des valeurs propres d'une matrice symétrique. Supposons que nous connaissons une valeur et un vecteur propre d'une matrices symétrique, c'est à dire que nous connaissons un scalaire λ_0 et un vecteur ϕ_0 tel que $A\phi_0 = \lambda_0\phi_0$. Une matrice symétrique par définition est égale à sa transposée $A^T = A$. Nous cherchons la valeur propre proche de λ_0 de la matrice $A + \epsilon B$. Appelons cette valeur propre μ . On cherche donc à résoudre

$$(A + \epsilon B)\psi = \mu\psi \quad (1.9)$$

Procédons comme nous l'avons mentionné plus haut. Nous chercherons la solution sous la forme

$$\mu = \lambda_0 + \epsilon\lambda_1 + \dots \quad (1.10)$$

$$\psi = \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \dots \quad (1.11)$$

et nous cherchons à déterminer λ_1, \dots et ϕ_1, \dots . En injectant (1.10-1.11) dans (1.9), nous avons :

$$(A + \epsilon B)(\phi_0 + \epsilon\phi_1 + \dots) = (\lambda_0 + \epsilon\lambda_1 + \dots)(\phi_0 + \epsilon\phi_1 + \dots)$$

et en regroupant les termes en puissance de ϵ , nous trouvons les équations suivantes :

$$A\phi_0 = \lambda_0\phi_0 \quad (1.12)$$

$$A\phi_1 + B\phi_0 = \lambda_0\phi_1 + \lambda_1\phi_0 \quad (1.13)$$

$$\dots = \dots$$

La première équation, c'est à dire les terme d'ordre 0 en ϵ , ne nous rapporte bien sûr rien que ne l'on connaisse déjà. Dans l'équation (1.13), nous avons deux inconnus, le vecteur ϕ_1 et le scalaire λ_1 à déterminer. Prenons le produit scalaire des deux côtés par le vecteur ϕ_0 :

$$(\phi_0, A\phi_1) + (\phi_0, B\phi_0) = \lambda_0(\phi_0, \phi_1) + \lambda_1(\phi_0, \phi_0) \quad (1.14)$$

Nous avons supposé que A est symétrique. Donc,

$$(\phi_0, A\phi_1) = (A^T\phi_0, \phi_1) = (A\phi_0, \phi_1) = \lambda_0(\phi_0, \phi_1)$$

et en injectant ce résultat dans (1.14), nous aboutissons finalement à

$$\lambda_1 = (\phi_0, B\phi_0)/(\phi_0, \phi_0)$$

Nous connaissons donc la correction d'ordre 1 à la valeur propre.

Si tout cela paraît un peu abstrait, cherchons la valeur propre de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 + \epsilon & 2\epsilon \\ 2\epsilon & 2 + 3\epsilon \end{pmatrix}$$

1 Calcul des perturbations.

Cette matrice est la somme d'une matrice diagonale $A = \text{diag}(1, 2)$ et de la matrice B tel que $B_{ij} = (i + j - 1)\epsilon$. La matrice B est la perturbation si on suppose $\epsilon \ll 1$. La matrice A possède bien sur les deux valeurs propres 1 et 2 et les vecteurs propres associés $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Cherchons la valeur propre proche de 1 de la matrice perturbée. D'après ce que nous avons dit, nous devons calculer $(1, 0)B(1, 0)^T$:

$$(1, 0) \cdot \begin{pmatrix} \epsilon & 2\epsilon \\ 2\epsilon & 3\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \epsilon$$

Comme $(1, 0)(1, 0)^T = 1$, la valeur propre proche de 1, à l'ordre 1 en ϵ , s'écrit

$$\mu = 1 + \epsilon$$

Le lecteur peut chercher directement la valeur propre de la matrice perturbée et vérifier le résultat ci-dessus. Bien sûr, quand la matrice est plus grande que 2×2 , la recherche directe peut être extrêmement fastidieuse.

La stabilité d'un système différentiel. Nous connaissons parfois un point fixe d'une équation, et nous souhaitons savoir si ce point est stable ou non. Par exemple, le point le plus bas pour un pendule est un point fixe stable, tandis que le point le plus haut est un point instable. Intuitivement, pour connaître la stabilité, nous écartons un peu le système de son point fixe. Si le système revient à son point de départ ou reste proche, l'équilibre est stable. Si au contraire, la perturbation tend à grandir, le point est alors instable.

Considérons l'équation du mouvement d'un pendule amorti

$$\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0 \tag{1.15}$$

où θ est l'angle avec l'axe vertical et $\theta = 0$ correspond au point le plus bas. Il est évident que les points $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ sont les points fixes de cet équation. Supposons maintenant que nous partons très proche du point $\theta = 0$, c'est à dire avec la condition initiale $\theta(t = 0) = \epsilon$. Cherchons comme d'habitude la solution sous forme de $\theta = 0 + \epsilon\theta_1 + \dots$. En réalité, comme nous nous intéressons qu'à la stabilité, le terme d'ordre 1 en ϵ nous suffit. En injectant cette solution dans (1.15) et en développant la fonction sin, nous trouvons :

$$\ddot{\theta}_1 + \rho\dot{\theta}_1 + \omega^2\theta_1 = 0$$

la solution générale de cette dernière est de la forme $\theta_1 = \exp(-\rho t) \exp(\pm i\omega' t)$ et elle tend effectivement vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. Le point $\theta = 0$ est donc un point stable. En répétant les mêmes opérations pour le point $\theta = \pi$, et en n'oubliant pas que $\sin(\pi + x) = -\sin x$, nous aboutissons à

$$\ddot{\theta}_1 + \rho\dot{\theta}_1 - \omega^2\theta_1 = 0$$

et cette fois, il est claire que quand $t \rightarrow \infty$, $\theta_1 \rightarrow \infty$. Le point $\theta = \pi$ est donc instable.

1.2 Les perturbations singulières.

Nous avons supposé, lors de l'étude des perturbations singulières, que la solution perturbée est proche de celle non perturbée. Cela n'est pas toujours le cas et l'ajout d'un petit terme peut radicalement changer la solution. Prenons le cas de l'équation algébrique

$$\epsilon x^2 + x - 1 = 0 \quad (1.16)$$

La solution non perturbée, *i.e.* pour $\epsilon = 0$ vaut $x = 1$. La solution exacte pour $\epsilon \neq 0$ s'écrit

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\epsilon}}{2\epsilon}$$

et un petit développement nous montre que les racines sont, pour $\epsilon \ll 1$, de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \epsilon \\ x_2 &= -\frac{1}{\epsilon} \end{aligned}$$

Nous avons donc l'apparition d'une nouvelle racine qui est d'autant plus grande que la perturbation est petite. Cela est un phénomène générale : à chaque fois que la perturbation est sur un terme d'ordre supérieur, la perturbation est singulière. Il existe parfois des changements de variable qui rendent la perturbation régulière. Par exemple, dans l'équation (1.16), en posant $x = 1/y$, nous avons

$$y^2 - y - \epsilon = 0$$

qui peut se traiter par la méthode habituelle. D'après notre traitement de (1.1), ses solutions sont

$$\begin{aligned} y_1 &= -\epsilon \\ y_2 &= 1 + \epsilon \end{aligned}$$

qui nous redonne bien les racines en $x = -1/\epsilon$ et $x = 1 - \epsilon$.

La même remarque s'applique aux équations différentielles. L'équation

$$\epsilon \ddot{x} + \dot{x} + 1 = 0$$

est celle d'un oscillateur harmonique amorti. Si la masse ϵ est nulle, la solution est de la forme $x = A \exp(-t)$. Si la masse est non nulle, la solution, à l'ordre le plus important en ϵ , est de la forme $A \exp(-t) + B \exp(-t/\epsilon)$ et le lecteur peut vérifier que les deux solutions sont radicalement différentes. Remarquons à nouveau que nous pouvons chercher un changement de variable de la forme $t = \epsilon^p t'$ et $x = \epsilon^q y$ qui rendrait la perturbation régulière. Nous en laissons le soin au lecteur intéressé.

L'ennui avec les équations différentielles est que les termes les plus inoffensifs peuvent rendre les perturbations singulières. Considérons l'exemple de l'oscillateur suivant :

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \epsilon x^3 = 0 \quad (1.17)$$

1 Calcul des perturbations.

ceci est l'équation d'un mobile dans un potentiel en $kx^2 + k'x^4$. La solution général de l'équation non perturbée est $a \cos(\omega t + \phi)$. Sans perte de généralité, on supposera $\phi = 0$. Nous cherchons alors la solution de l'équation perturbée sous forme de $x(t) = a \cos(\omega t) + \epsilon x_1(t) + \dots$. En injectant dans l'équation et en collectant les termes d'ordre 1 en ϵ , nous trouvons que

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -a^3 \cos^3(\omega t) \quad (1.18)$$

Or, $\cos^3(u) = (1/4) \cos(3u) + (3/4) \cos(u)$ et donc la solution de (1.20) est donnée par la somme de la solution des deux équations suivante :

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = (-a^3/4) \cos(3\omega t) \quad (1.19)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = (-3a^3/4) \cos(\omega t) \quad (1.20)$$

La première équation ne présente pas de danger : c'est l'équation d'un oscillateur harmonique de fréquence propre ω forcée à la fréquence 3ω et possède une solution du genre $\cos(3\omega t + \alpha)$.

Par contre, la deuxième équation (1.20) est celle d'un oscillateur harmonique de fréquence propre ω forcée justement à ω . Il y a donc résonance et la solution, qui est de la forme $t \cos(\omega t + \beta)$, va devenir très large. Cela viole notre hypothèse de départ sur les développements en puissance d' ϵ . Nous avons écrit

$$x(t) = a \cos(\omega t) + \epsilon x_1(t) + \dots$$

en supposant $x_1(t)$ bornée, de façon à ce que $\epsilon x_1(t)$ reste toujours petit par rapport à la solution non perturbée $a \cos(\omega t)$. Or, nous voyons qu'au bout d'un temps $t > 1/\epsilon$, le soit disant petit terme devient en fait le terme dominant.

Il existe de nombreux types différents de perturbations singulières et au moins autant de façons de les traiter. L'objet de ce livre n'étant pas un cours détaillé sur le calculs de perturbations, nous nous en tiendrons presque là. Nous trouvons cependant utile de montrer comment traiter les cas similaires à l'exemple ci-dessus. La technique est appelée "élimination des termes séculaires ou résonnants".

Le traitement des termes séculaires.

La perturbation que nous avons considérée plus haut intervient dans pratiquement tous les problèmes d'oscillations, et c'est pourquoi il nous semble important de la traiter. En regardant de plus près l'équation (1.17), nous voyons qu'il n'y a rien d'anormal ou de divergent. Elle décrit simplement des oscillations au fond d'un puits peut être un peu plus raide qu'un puits harmonique et il n'y a aucune raison que quelque chose diverge. L'erreur ne peut venir que de notre traitement. En supposant que la solution s'écrit sous la forme $a \cos(\omega t) + \epsilon x_1(t)$, nous avons fait l'erreur de penser que le terme d'ordre 0 continue à présenter une oscillation à fréquence ω . Il n'y a aucune raison pour cela, et la fréquence peut également être de la forme $\omega + \epsilon \omega_1 + \dots$. La figure (1.1) montre la différence entre $\sin(t)$ et $\sin(1.01t)$ pour les temps inférieurs à vingt et pour les temps autour de 250. Nous voyons que la différence est à peine perceptible pour les temps courts, tandis que

1 Calcul des perturbations.

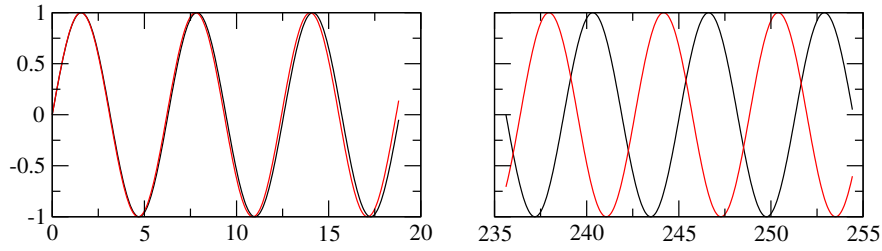


FIGURE 1.1 – $\sin(t)$ (en noir) et $\sin(1.01t)$ (en rouge) pour les temps courts et longs.

les deux fonctions n'ont plus rien à voir aux temps longs. Ce problème avait été observé d'abord en astronomie, où les calculs perturbatifs des siècles précédents commençaient à s'écarter des observations (d'où le terme séculaire). Lindstedt (vers 1880) a remédié à ces carences par sa technique de renormalisation qui est de chercher la solution sous la forme

$$x(t) = a \cos[(\omega + \epsilon\omega_1)t] + \epsilon x_1(t) \quad (1.21)$$

En injectant la forme (1.21) dans (1.17) et en collectant les termes d'ordre 1 en ϵ , nous trouvons cette fois

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 - 2a\omega\omega_1 \cos[(\omega + \epsilon\omega_1)t] = (-a^3/4) \cos[3(\omega + \epsilon\omega_1)t] - (3a^3/4) \cos[(\omega + \epsilon\omega_1)t]$$

Il nous suffit maintenant de choisir

$$\omega_1 = \frac{3a^2}{8\omega}$$

pour éliminer le terme résonnant. La solution perturbative à l'ordre 1 s'écrit alors :

$$x(t) = a \cos[(\omega + \epsilon \frac{3a^2}{8\omega})t] + \epsilon A \cos[3(\omega + \epsilon \frac{3a^2}{8\omega})t + \alpha]$$

où les coefficients a, A, α sont déterminés à partir des conditions initiales.

Problèmes.

Racine des polynômes.

1. Soit $P(x) = \sum a_n x^n$ un polynôme dont une des racines, x_0 est connue, c'est à dire $P(x_0) = 0$. Soit le polynôme $P'(x) = P(x) + \epsilon x^p$. Soit x' la racine proche de x_0 de ce dernier. Montrer qu'à l'ordre 1,

$$x' = x_0 - \frac{x_0^p}{\sum n a_n x_0^{n-1}} \epsilon$$

2. Pouvez vous exhiber la correction à l'ordre 2 ?

1 Calcul des perturbations.

3. Soit l'équation

$$x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 6x^2 + 6x + 1 = 0 \quad (1.22)$$

Nous remarquons qu'en écrivant par exemple le coefficient de x^4 comme $2 + \epsilon$ (où $\epsilon = 1$), la somme des coefficients de l'équation non perturbée vaut 0. $x = 1$ est donc une solution de l'équation non perturbée (*i.e.* pour $\epsilon = 0$). Calculez la correction à cette racine à l'ordre 1 en ϵ et comparez à la solution exacte $x = 1.10565$. Et si au lieu du coefficient du x^4 , nous avions choisit un autre terme, qu'aurait on obtenu ?

4. Calculer la correction à l'ordre 2. Pouvez vous alors trouver un critère pour le choix du coefficient pour que la correction à l'ordre 1 soit la meilleure ?

Équation transcendante.

1. $x \log x = 0$ admet une solution pour $x = 1$. Calculez, à l'ordre 3, la racine proche de 1 de l'équation $x \log x = \epsilon$. Comparez à la solution exacte 1.09557 pour $\epsilon = 0.1$. Pouvez-vous utiliser la même approche pour trouver la solution proche de 0 ?
2. Trouver la racine, proche de π , de $x \sin x = \epsilon$. Comparez, pour $\epsilon = 0.1$, à la solution exacte $x = 3.10943$.

Équation intégrale. Nous avons rencontré les équations intégrales lors de notre discussion des fonctions de Green. Nous allons étudier ci-dessous un schéma itératif de leurs résolution. Cependant, ces schémas sont en général extrêmement fragiles, et il faut toujours s'assurer de leur convergence.

1. Une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce est de la forme

$$f(x) = g(x) + \mu \int_a^b K(x, x') f(x') dx'$$

Proposez un schéma de résolution par le calcul des perturbations. Ne vous contentez pas de l'ordre 1. Trouvez la perturbation d'ordre n en général.

2. Profitez pour exhiber la solution exacte de

$$f(x) = 1 + \lambda \int_0^\infty e^{-(x+y)} f(y) dy$$

En calculant les perturbations à tout ordre et en sommant la série ainsi obtenue.

3. Faites la même chose pour

$$f(x) = 1 + \lambda \int_0^x f(y) dy$$

Attention, les bornes de l'intégrale dépendent de x . On appelle ces équations Volterra de deuxième espèce.

1 Calcul des perturbations.

Oscillateur de Van der Pol. Van der Pol a proposé l'équation suivante dans les années 1920 pour modéliser les oscillateurs auto-entretenus comme le battement de cœur

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0 x = 0$$

Le coefficient du terme \dot{x} est équivalent à un frottement. Nous voyons qu'il est *négligable* si l'amplitude x est petite (< 1), c'est à dire que le système reçoit de l'énergie de l'extérieur, ce qui va l'amener à augmenter son amplitude. Par contre si l'amplitude devient trop grande (> 1) le frottement devient positif et le système perd de l'énergie vers l'extérieur, ce qui va diminuer son amplitude. Nous voyons que le système maintient une oscillation stable quelque soit les conditions de départ.

1. Montrer que le point fixe $x = 0$ est instable.
2. En partant de la solution non perturbée $x = a \cos \omega_0 t$, montrez que les perturbations régulières génèrent des termes résonnants.
3. Utilisez la renormalisation de Lindstedt pour éliminer les termes résonnants. Pour cela, chercher la solution sous forme de

$$x(t) = a \cos \Omega t + \epsilon x_1(t)$$

où $\Omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1$. Vous pouvez apercevoir que l'élimination des termes résonnants impose une condition sur l'*amplitude* de l'oscillation, ce que l'on appelle un cycle limite.

Écosystème de prédateurs–proies. Une des interactions fondamentales en écologie est celle des prédateurs et des proies. Le premier modèle pour la dynamique de ces deux populations a été proposé par Lotka et Volterra au début des années 1930. Soit P le nombre des prédateurs et N le nombre des proies dans l'écosystème. Lotka et Volterra ont proposé

$$dN/dt = \alpha N - \beta NP \tag{1.23}$$

$$dP/dt = \gamma NP - \delta P \tag{1.24}$$

α est le taux de croissance naturel des proies en l'absence des prédateurs. La présence des prédateurs cause également la disparition des proies, proportionnellement au nombre de prédateur et de proie, d'où le terme en $-\beta NP$ dans la première équation, β étant l'efficacité de la chasse. Dans l'équation qui régit la dynamique des prédateurs, nous voyons que la croissance est fonction du nombre de proie disponible, et le terme δ est le taux de mort naturel des prédateurs.

1. Montrez que ce système possède un point fixe, c'est à dire des valeurs N_0, P_0 pour lesquels $dN/dt = dP/dt = 0$.
2. Étudiez la solution de ce système pour les faibles écarts au point fixe. Cela veut dire que nous prenons des conditions initiales du genre $N(t=0) = N_0 + \epsilon$ et $P(0) = P_0$. Cherchez la solution sous la forme $N(t) = N_0 + \epsilon N_1(t)$ et $P(t) = P_0 + \epsilon P_1(t)$, et en collectant les termes d'ordre 1 en ϵ , obtenez un système linéaire pour N_1 et P_1 . Résolvez ce système et déduisez également la forme du cycle limite, c'est à dire N_1 en fonction de P_1 .

1 Calcul des perturbations.

3. Poussez les calculs à l'ordre 2 en ϵ et étudiez l'apparition d'harmonique supérieurs.
4. Vous pouvez également remarquer que le cycle limite peut s'obtenir en divisant directement (1.23) par (1.24) et en résolvant l'équation différentielle du premier ordre. Comparez le résultat de ce calcul au résultat de la question 2.

Stabilité d'interface. Soit une interface $u(x, t)$ (par exemple entre solide et liquide lors de la coulée continue en métallurgie) décrite par l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -au - bu^3 + c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - d \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

où nous supposons les coefficients $a, b, d > 0$. Discuter la stabilité linéaire de la solution $u(x, t) = 0$ selon que c est positif ou négatif et chercher les seuils d'instabilité.