

1 Les séries de Fourier.

Nous allons dans ce chapitre étudier les Séries de Fourier. On ne peut pas sérieusement toucher un sujet de physique sans utiliser d'une manière ou d'une autre ces séries (ou leur généralisation, les transformées de Fourier). Nous en verrons de nombreux exemples à travers ce cours. Les séries de Fourier ont également joué un grand rôle dans le développement des mathématiques. Quand Joseph Fourier présenta la première fois le résultat de son analyse de l'équation de la chaleur à l'Académie des Sciences, l'accueil était loin d'être enthousiaste et beaucoup, parmi les plus grands (Laplace et Lagrange) s'y sont violemment opposé : Comment la somme d'une suite de fonctions toutes continues peut être "égale" à une fonction discontinue ? Le pragmatisme a fait avancer l'usage des ces suites bizarres jusqu'à ce que d'autres mathématiciens comme Lebesgue (pour justifier ces pratiques un peu sales) redéfinissent la théorie de la mesure et fassent faire un bond à l'analyse mathématique. De tout cela, on ne parlera pas ici. Notre approche sera beaucoup plus pratique : Qu'est ce qu'une série de Fourier, à quoi elle sert, comment on fait pour l'obtenir.

1.1 Introduction.

Les premiers travaux sur la décomposition en série de Fourier viennent en faite du grand Lagrange lui même dans les années 1780 et son étude de l'équation des cordes vibrantes. Supposons une corde tendu entre 0 et L qu'on déforme à l'instant initial et que l'on relâche. Soit $y(x, t)$ l'écart à l'équilibre à la position x et à l'instant t . On démontre alors que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{1.1}$$

où v est un coefficient qui dépend de la densité et de la tension de la ligne. Cherchons la solution de cette équation sous la forme $y = A_{k,\omega} \cos \omega t. \sin kx$. En injectant cette forme dans l'équation (1.1), on trouve que cette forme ne peut être une solution que s'il existe une relation entre ω et k : $\omega = vk$. Ensuite, la fonction y doit satisfaire les conditions aux bords $y(0, t) = y(L, t) = 0$. La première condition est automatiquement satisfaite. La deuxième condition impose $\sin kL = 0$, c'est à dire $k = n\pi/L$, où $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. On déduit de tout cela que les fonctions $f_n(x, t) = A_n \cos(n\pi vt/L) \sin(n\pi x/L)$ sont solution de notre équation d'onde

avec ses conditions aux bords. On les appelle les modes propres de vibration. Le principe de superposition nous dit (le démontrer) que si f et g sont solution, alors $f + g$ l'est aussi. La solution générale de l'équation d'onde (1.1) est donc de la forme

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi vt/L) \sin(n\pi x/L)$$

Jusque là, nous n'avons rien dit des coefficients A_k , puisqu'ils ne peuvent pas être obtenus de l'équation d'onde directement. Ils doivent sortir de la condition $y(x, 0) = y_0(x)$, c'est à dire de la déformation originale que nous avons imprimé à notre corde à l'instant $t = 0$. Nous devons donc avoir :

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/L)$$

Est-il possible de trouver des coefficient A_n pour satisfaire cette équation ? Nous verrons la réponse plus bas. A priori, trouver la réponse paraît assez compliquée. Notons que si y_0 a une forme simple, on peut trouver une solution. Par exemple, si $y_0(x) = 4 \sin(11\pi x/L)$, alors $A_{11} = 4$ et tous les autres A_n sont nul.

1.2 Les séries de Fourier.

Nous allons étudier maintenant de façon approfondie les fonctions sin et cos, puisqu'elles peuvent constituer une base. Plus précisément,

Théorème. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}_2[0, L]$, c'est à dire celui des fonctions de carré sommable définies sur l'intervalle $[0, L]$, les fonctions

$$1, \sin(2\pi x/L), \cos(2\pi x/L), \dots \sin(2\pi n x/L), \cos(2\pi n x/L), \dots$$

constituent une base orthogonale.

Nous accepterons ce théorème sans démonstration¹, et allons plutôt contempler quelques uns de ses aspects. D'abord, l'orthogonalité. Puisque

$$(1, \sin n(\cdot)) = \int_0^L \sin(2\pi n x/L) dx = -\frac{L}{2\pi n} [\cos(2\pi n x/L)]_0^L = 0$$

1. La démonstration est due à Weierstrass dans les années 1880. Elle ne pose pas de difficulté majeure. Disons que pour qu'une suite f_n de vecteurs orthogonaux constitue une base, il faut que si un élément g est orthogonal à tous les f_n , alors $g = 0$. C'est pour cela par exemple que la suite des $\sin(\cdot)$ seul ne peut constituer une base : on peut trouver toujours des $\cos(\cdot)$ qui soit orthogonaux à tous les $\sin(\cdot)$.

la fonction 1 est orthogonale à tous les sinus et tous les cosinus. Ensuite, comme

$$2 \sin(2\pi nx/L) \sin(2\pi mx/L) = \cos(2\pi(n-m)x/L) - \cos(2\pi(n+m)x/L)$$

les fonctions $\sin n(\cdot)$ et $\sin m(\cdot)$ sont orthogonales, sauf si $n = m$, auquel cas, $\|\sin n(\cdot)\| = \|\cos n(\cdot)\| = L/2$.

Ensuite, une fonction f quelconque de $\mathcal{L}_2[0, L]$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx/L) + b_n \sin(2\pi nx/L)$$

et comme notre base est orthogonale, les coefficients a_n et b_n sont donnés par le produit scalaire de f par les éléments de la base :

$$a_0 = (1/L) \int_0^L f(x) dx \tag{1.2}$$

$$a_n = (2/L) \int_0^L f(x) \cos(2\pi nx/L) dx \tag{1.3}$$

$$b_n = (2/L) \int_0^L f(x) \sin(2\pi nx/L) dx \tag{1.4}$$

Notons que le coefficient a_0 est la moyenne de la fonction f sur l'intervalle donnée.

Exemple 1. Prenons la fonction $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$. Le coefficient a_0 s'obtient facilement en utilisant l'éq.(1.2) : $a_0 = 1/2$. Pour les autres coefficients, nous avons besoin d'une intégration par partie :

$$b_n = 2 \int_0^1 x \sin(2\pi nx) dx = \frac{-1}{\pi n} [x \cos(2\pi nx)]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{\pi n} \int_0^1 \cos(2\pi nx) dx = -\frac{1}{\pi n}$$

$$a_n = 2 \int_0^1 x \cos(2\pi nx) dx = \frac{1}{\pi n} [x \sin(2\pi nx)]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{\pi n} \int_0^1 \sin(2\pi nx) dx = 0$$

Nous pouvons donc écrire

$$x = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi nx) \quad x \in [0, 1] \tag{1.5}$$

La figure 1.1 montre la fonction x , ainsi que ses approximations successives en prenant de plus en plus de termes de la série de Fourier. . Nous pouvons constater plusieurs choses : (i) évidemment, plus on prend de terme, plus l'approximation est bonne, mais nous avons des oscillations de plus en plus violentes sur les bords, dont l'amplitude décroît ; (ii) l'approximation prend les mêmes valeurs aux deux

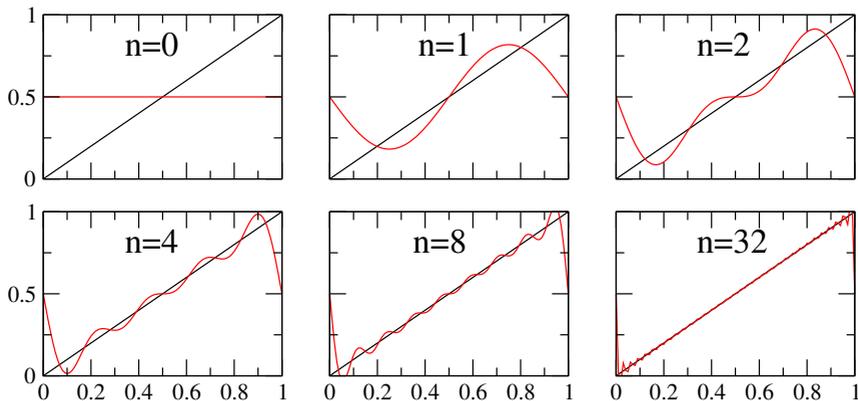


FIGURE 1.1 – Approximations successives de la fonction x par les séries de Fourier. En noir, la fonction originale, en rouge l'approximation par la série géométrique.

bords, ce qui n'est pas le cas de la fonction originale ; (iii) cette valeur est $1/2$ dans le cas présent, ce qui est la moyenne des valeurs que prend la fonction originale aux deux bords.

Le point (ii) est dû à la périodicité de nos fonctions sin et cos : chaque fonction dans la somme, étant de période au moins 1, prend obligatoirement la même valeur sur les deux bords, donc la somme doit également prendre la même valeur sur les deux bords. Le point (iii) est plus troublant : la fonction originale $f(x) = x$ prend la valeur 0 en $x = 0$ et 1 en $x = 1$. La somme par contre, prend la valeur $1/2$ sur les deux bords : la somme ne converge donc pas en tout point vers la fonction originale (adieu la convergence uniforme ou point par point), mais seulement pour la *majorité* des points sur l'intervalle. Ils se trouvent que cette majorité est largement suffisante : si on prend une infinité de terme dans la somme, alors la somme et la fonction originale ne diffèrent qu'en deux points. Deux comparé à la taille de \mathbb{R} donne tous son sens à la notion de majorité. On dit que la différence entre la fonction originale et la série *est de mesure nulle*.

Tout ce que nous avons dit ci-dessus se généralise immédiatement aux intervalles quelconques $[a, b]$. Il suffit simplement dans les formules, poser $L = b - a$ qui représente comme avant la longueur de l'intervalle.

Exemple 2. Prenons cette fois la même fonction $f(x) = x$, mais sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. Le même calcul que précédemment nous mène à

$$x = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin(2\pi n x) \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (1.6)$$

Nous voyons que les coefficients dépendent également de l'intervalle sur lequel la fonction est définie.

Notons enfin qu'en prenant des valeurs de x particulières, nous disposons d'un moyen intéressant de trouver la limite de certaines sommes. Dans l'équation (1.5) par exemple, si on pose $x = 1/4$, nous trouvons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

Égalité de Parseval. En utilisant la notion d'orthogonalité et de produit scalaire, il est facile de démontrer que

$$\frac{1}{L} \int_0^L f(x)^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (1.7)$$

Cela veut dire qu'au lieu de calculer explicitement l'intégrale du carré de la fonction, nous pouvons simplement sommer le carré de ses coefficients de Fourier. A priori, la démarche paraît absurde, puisque pour calculer les coefficients, on a du déjà effectuer des intégrales. Mais nous allons voir dans la suite que dans de nombreuses applications, notamment celles liées à la solution d'équation à dérivée partielle, nous calculons directement les coefficients de Fourier de la fonction recherchée. Le côté gauche de l'équation (1.7) désigne souvent l'énergie stocké dans un volume, par exemple si f désigne la hauteur d'une corde tendu ou le champs électrique. L'égalité de Parseval nous permet alors d'accéder à cette quantité.

Exercices.

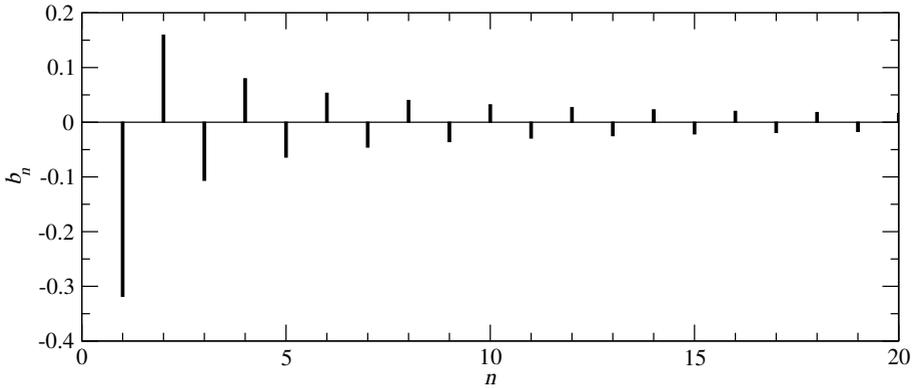
1. Décomposez les fonction $f(x) = x^2$ et $f(x) = \exp(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour ce dernier, si le produit scalaire vous pose problème, noter que $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$. Profiter de la décomposition de x^2 pour trouver la limite de $\sum 1/n^2$. C'était une des fierté d'Euler, dans les années 1730, que d'avoir pu déterminer cette somme.
2. Soit la fonction "palier" f sur $[0, 1]$ tel que $f(x) = -1/2$ si $x < 1/2$ et $f(x) = 1/2$ si $x \geq 1/2$. Trouver sa décomposition en série de Fourier.

3. Même question que précédemment, mais la fonction f est définie par $f(x) = 0$ si $x < 1/2$ et $f(x) = 1$ si $x \geq 1/2$. En comparant ce résultat au résultat précédent, pouvez en tirer des conclusions générales ?
4. Décomposer la fonction triangle, $f(x) = 1 - 2|x|$ sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$.
5. Trouver la série de Fourier de $\sin(x/2)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
6. Démontrer qu'à part le coefficient a_0 , les deux fonctions $f(x)$ et $g(x) = f(x) + C$ ont les mêmes coefficients de Fourier. Que vaut le coefficient a_0 pour ces deux fonctions ?
7. Une fonction paire est tel que $f(-x) = f(x)$, c'est à dire que l'axe y constitue un axe de symétrie. Démontrer alors que sur un intervalle $[-L, L]$, les coefficients b_n de la série de Fourier sont nuls. On peut généraliser cette affirmation : si la fonction f , sur l'intervalle $[0, L]$, est symétrique par rapport à son milieu, c'est à dire telle que $f(L - x) = f(x)$, alors ses coefficient de Fourier b_n sont nuls (à démontrer bien sûr).
8. Que peut on dire des coefficient de Fourier d'une fonction impaire ? En vous inspirant des deux précédents problèmes, que pouvez vous dire des coefficients de Fourier, sur $[0, L]$, d'une fonction telle que $f(L - x) = C - f(x)$?
9. Quelle est la condition pour que la fonction x^α appartienne à $\mathcal{L}_2[0, 1]$. Démontrer alors que si elle n'appartient pas à $\mathcal{L}_2[0, 1]$, elle ne peut pas se décomposer en série de Fourier. Pouvez vous généraliser ce résultat ?
10. Démontrer l'égalité de Parseval.
11. Qu'elle est la représentation matricielle de l'opérateur $D = d/dx$ dans la base de Fourier ? Et celle de $D^2 = d^2/dx^2$?

1.3 Pourquoi les séries de Fourier sont intéressantes ?

La base de Fourier est en fait très bien adapté pour étudier les phénomènes oscillatoires, et ces derniers sont abondants dans la vie de tous les jours : le mouvement d'un camion sur un pont génère des vibrations dans toute la structure de ce dernier ; le mouvement des pistons dans le moteur met la voiture en vibration ; une onde électromagnétique provoque l'oscillation des électrons à la surface du métal,...Nous ne pourrions pas traiter ces problèmes si nous ne disposions pas de la base de Fourier. Voyons cela ce plus près.

Soit une fonction f périodique, de période L . Cela veut dire que $f(x + L) = f(x)$. Pour connaître cette fonction, il suffit donc de connaître sa valeur seulement sur un intervalle de longueur L . Or, les fonctions $\sin(2\pi nx/L)$ et $\cos(2\pi nx/L)$ sont également périodiques, et de la même période L . Donc, si une somme de

FIGURE 1.2 – Le spectre de la fonction x sur $[-1/2, 1/2]$

ces fonctions égale la fonction f sur une intervalle de longueur L , elle égale la fonction f partout !

Comme nous le savons, si ces fonctions sont de carré sommable sur une période, elle peuvent se décomposer en série de Fourier. Représenter leurs coefficients de Fourier a_n et b_n en fonction de n est aussi bien que de les représenter en fonction de x . Cette représentation est appelé le spectre d'une fonction, et ses composantes de Fourier les *harmoniques*. C'est un vocabulaire issue de la musique. La figure 1.2 représente le spectre de la fonction $f(x) = x$ sur $[-1/2, 1/2]$. En réalité, pour des raisons que nous verrons plus tard, on n'est même intéressé qu'aux coefficients $s_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et c'est ce dernier qu'on appelle couramment le spectre. Ce qui distingue le Do 240 Hz du piano de la même note d'une flûte n'est pas leurs fréquence de base, mais l'amplitude de leurs harmoniques (la forme de leur spectre). On appelle cela le timbre d'un instrument. L'oreille à une capacité fantastique à distinguer les timbres, et les meilleurs synthétiseur doivent sommer plus d'une vingtaine d'harmonique pour pouvoir imiter une note d'un vrai instrument.

L'oreille humain d'ailleurs ne fait que décomposer les sons en leurs harmoniques : la forme intérieure de l'oreille fait qu'une vibration pure (sinusoïdale) de fréquence donnée met une région particulière de l'oreille en oscillation, ce qui stimule les neurones à cet endroit. Chaque harmonique d'un son excite donc une région différente de l'oreille, et la carte de ces régions permet au cerveau de déterminer très précisément la nature du son et distinguer ainsi le piano du violon.

La compression JPEG des photos numériques utilise le principe des transformées de Fourier : une image est divisée en plusieurs régions et les composantes de Fourier de chaque sous régions sont calculées, mais seulement l'amplitude des premières harmoniques sont conservées, puisque l'oeil humain n'est pas sensible aux petits détails.

Exercices.

Représenter le spectre des fonctions décomposées plus hauts.

1.4 Un peu de généralisation.

Nous avons manipuler plus des sinus et des cosinus séparément. Mais ces deux fonctions ne sont que des combinaisons d'exponentiel d'arguments imaginaires. Il serait donc tout aussi logique de choisir comme base les fonctions $\exp(2i\pi nx/L)$. Cela en plus nous élargit un peu les horizons, puisqu'on peut alors étudier les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (pourvu qu'elles soient de carré sommable). N'oublions pas cependant que le produit scalaire s'obtient dans ce cas un intégrant une fonction qui multiplie le complexe conjugué de l'autre. Nous avons donc,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(2i\pi nx/L)$$

Tous ce que nous avons dit plus haut se généralise aisément.

Exercices.

1. En vous inspirant du calcul des coefficient a_n et b_n , expliquer comment on calcule les coefficients c_n .
2. Démontrer que si $f(x) \in \mathbb{R}$, alors $c_{-n} = c_n^*$.
3. Trouver la relation entre a_n, b_n et c_n .
4. Énoncer la relation de Parseval avec les coefficients c_n .

1.5 Les séries de sinus et de cosinus.

Nous avons vu que sur l'intervalle $[0, L]$, les fonctions $1, \sin(n2\pi x/L), \cos(n2\pi x/L)$ ($n \in \mathbb{N}$) constituent une base orthogonale qu'on appelle la base de Fourier : ces fonctions sont orthogonales les unes aux autres, et la suite est *complète*. Cette dernière assertion est équivalente à "il n'existe pas de fonction, à part celle uniformément nulle, qui soit orthogonale à toutes les fonctions de la base de Fourier". Est-il possible de trouver une autre base sur l'intervalle $[0, L]$ seulement composée de fonctions sinus ou seulement composée de fonction cosinus? La réponse est oui : la suite des fonctions $\sin(n\pi x/L)$ (remarquer la disparition du coefficient 2 dans l'argument) également constitue une base, de même que la suite $\cos(n\pi x/L)$. Le choix d'une base plutôt que d'une autre est seulement dicté par le problème que nous avons à résoudre, nous en verrons un exemple plus bas.

Les séries de sinus. Prenons d'abord une fonction $f(x)$ définie sur $[-L, L]$ (un intervalle de longueur $2L$ donc). Sa série de Fourier est donnée par

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

et ses coefficients de Fourier sont

$$a_n = (1/L) \int_{-L}^{+L} f(x) \cos(n\pi x/L) dx$$

$$b_n = (1/L) \int_{-L}^{+L} f(x) \sin(n\pi x/L) dx$$

Supposons maintenant que la fonction f est impaire, c'est à dire $f(-x) = -f(x)$. En écrivant les intégrales ci-dessus comme la somme de deux intégrales (de $-L$ à 0 et de 0 à L) il est alors évident que tous les coefficients a_n sont nuls, et les coefficients b_n sont donnés par

$$b_n = (2/L) \int_0^L f(x) \sin(n\pi x/L) dx \quad (1.8)$$

Considérons maintenant une fonction $f(x)$ définie sur $[0, L]$. On peut toujours trouver une extension g de f telle que sur l'intervalle $[0, L]$ les deux fonctions coïncident ($g(x) = f(x)$) et que sur l'intervalle $[-L, L]$, la fonction g est impaire. Il est donc évident que sur l'intervalle $[0, L]$, nous pouvons développer f en série de sinus seulement

$$f(x) = \sum_{n=1} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

où les coefficients b_n sont donnés par la relation (1.8). La figure (1.3) montre les trois premiers vecteurs de la base de Fourier et de la base des sinus.

Exercice.

1. Développer de façon analogue le développement en série de cosinus pur d'une fonction sur l'intervalle $[0, L]$ en considérant les fonction *paires* sur l'intervalle $[-L, L]$.
2. Démontrer que les fonction $\sin(n\pi x/L)$ sont orthogonales les unes aux autres sur l'intervalle $[0, L]$, et que l'on ne peut pas trouver une fonction $\cos(kx)$ qui soit orthogonale à toutes ces fonctions. Cela pourrait un peu plus nous convaincre de la complétude de cette suite.

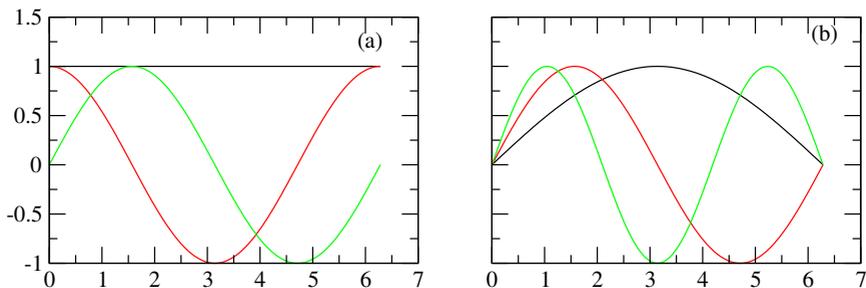


FIGURE 1.3 – Comparaison des trois premières fonction de la base de fourier (a) et celle des sinus.

1.6 Vibration d'une corde.

Les problèmes de vibration sont une des raisons du succès de l'analyse de Fourier. Nous traitons le cas de la corde vibrante, mais beaucoup d'autres problèmes ondulatoires comme le champs électromagnétique ou les ondes élastiques se traitent par exactement les mêmes méthodes. Revenons à l'équation d'une corde vibrante que nous avons mentionné au début de ce chapitre, et traitons le à l'aide de l'artillerie que nous avons développé. Comme nous l'avons dit plus haut, nous considérons une corde élastique dont (i) les deux extrémités sont fixées aux points $x = 0$ et $x = L$; (ii) est soumise à une tension T ; (iii) a une densité linéaire ρ . Si nous repérons la hauteur de la courbe par $y(x)$, l'équation d'évolution de y s'écrit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1.9)$$

Nous ne justifions pas cette équation. Notons simplement que le membre de droite est l'accélération d'un élément infinitésimal de la corde (dans le sens vertical) au point x , et que le membre de droite est proportionnel à la force exercée sur cet élément par ses voisins. L'équation ci-dessus est simplement la relation de la dynamique $a = f/m$ pour un matériau continu. Le paramètre v a les dimensions d'une vitesse. Les seuls paramètres intrinsèques du problème étant la tension et la densité, il n'existe qu'une seule façon (dimensionnellement parlant) de former une vitesse et v^2 doit être proportionnelle à T/ρ . Nous supposons enfin qu'initialement, la corde est maintenue dans une certaine forme (pincée par exemple) $y_0(x)$ et qu'on la relâche à l'instant $t = 0$.

Nous pouvons à chaque instant, représenter la fonction $y(x;t)$ à l'aide de sa série de Fourier ou de sinus. Pour la représenter à tous les instants, il suffit donc

que les *coefficients* de la série soient fonction du temps :

$$y(x; t) = \sum_{n=1} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (1.10)$$

Notons que nous faisons ici le choix de rechercher la solution sous la forme de fonction de sinus, puisque chaque terme de la série respecte les conditions aux bords $y(0, t) = y(L, t) = 0$. En injectant (1.10) dans (1.9) est en identifiant terme à terme (puisque les fonctions sont orthogonales), nous trouvons une équation différentielle pour l'amplitude de chaque mode :

$$b_n''(t) + n^2\omega^2 b_n(t) = 0$$

où $\omega = \pi v/L$. Comme la corde est relâché avec une vitesse nulle, nous avons simplement

$$b_n(t) = B_n \cos(n\omega t)$$

où les coefficient B_n sont les coefficient de la série des sinus de la fonction $y_0(x)$.

L'image est donc la suivante : la déformation initiale est la superposition d'un certain nombre de mode, chacun avec une amplitude b_n . Une fois qu'on relâche la corde, l'amplitude de chaque mode oscillera dans le temps. Remarquez cependant qu'il n'y a pas de transfert entre les modes : si un mode n'était pas présent dans la déformation initiale, il ne sera pas excité par la suite. Chaque mode se comporte comme un oscillateur indépendant, non couplé aux autres. En langage plus chic, on dira que la base de Fourier est une base propre pour l'opérateur Laplacien : dans cette base, la représentation matricielle de cet opérateur est diagonale.

Nous avons, lors de cette résolution, inversé l'ordre des opérations de dérivation et de sommation. Nous savons qu'il existe des conditions très contraignantes pour pouvoir effectuer cette inversion, et elles sont loin d'être réunies à priori (voir ci-dessous). Notons enfin que la différence entre un clavecin et un piano, qui excitent pratiquement les même cordes tendues, est dans la façon de former la déformation initiale, donc de produire des coefficients B_n différents.

1.7 Dérivation terme à terme des séries de Fourier.

1.7.1 Dérivation par rapport à la variable principale.

Soit la fonction continue et dérivable par morceau $f(x)$ dont la décomposition de Fourier est

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x/L) + b_n \sin(2\pi n x/L)$$

Dans quelles conditions nous pouvons la dériver terme à terme? Décomposons la fonction $f'(x)$ en série de Fourier :

$$f'(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(2\pi nx/L) + \beta_n \sin(2\pi nx/L)$$

Nous avons alors pour le premier terme

$$\alpha_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f'(x) dx = \frac{1}{L} (f(L) - f(0))$$

et pour les termes en cosinus

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) \cos(2\pi nx/L) dx \\ &= \frac{2}{L} (f(L) - f(0)) + \frac{2\pi n}{L} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(2\pi nx/L) dx \\ &= \frac{2}{L} (f(L) - f(0)) + \frac{2\pi n}{L} b_n \end{aligned} \tag{1.11}$$

Finalement, pour les termes en sinus, on trouve, en suivant le même chemin,

$$\beta_n = -\frac{2\pi n}{L} a_n$$

Nous voyons donc que si $f(L) = f(0)$, nous pouvons dériver la série de Fourier terme à terme. Sinon, des termes additionnels apparaissent quand on dérive les termes en sinus dont il faut en tenir compte.

On peut généraliser ce résultat aux séries de sinus et de cosinus pures :

1. Si $f(x)$ est continue et dérivable par morceau, sa série de cosinus est dérivable terme à terme sans restriction.
2. Si $f(x)$ est continue et dérivable par morceau, sa série de sinus est dérivable terme à terme si $f(L) = f(0) = 0$! Sinon, des termes additionnelles apparaissent dans la série de sinus de la dérivée, qui sont de la forme $2((-1)^n f(L) - f(0))/L$.

Nous voyons maintenant dans quelles conditions nous avons pu dériver terme à terme la série de la corde vibrante. Comme nous avons la condition $u(0, t) = u(L, t) = 0$, nous pouvons dériver la série de sinus pour obtenir une série de cosinus. Nous avons pu ensuite dériver cette dernière encore une fois sans restriction particulière.

Une hérésie saute aux yeux dans l'équation (1.11) : la suite α_n comporte un terme qui ne dépend pas de n et ne tend pas vers 0. Cela n'est pas du plus bel

effet pour la convergence de la série ! La réponse est dans le coefficient b_n , qui doit forcément avoir un terme en $-\Delta/\pi n$ pour annuler exactement le terme constant. C'est ce que l'on va voir plus bas dans un cas particulier.

En pratique, au lieu de dériver terme à terme et prendre en compte les termes additionnels dus aux conditions au bords, il est préférable de régulariser les conditions aux bords pour ne pas avoir de termes additionnels du tout. Supposons par exemple que les conditions aux bords soit $u(0, t) = a$, $u(L, t) = b$. Il est alors préférable d'utiliser la fonction

$$w(x, t) = u(x, t) - \frac{b-a}{L}x - a \quad (1.12)$$

Les dérivées temporelles et les dérivées secondes spatiales de u et w coïncident évidemment. $w(x, t)$ est satisfait donc à la même équation que u s'il s'agit d'une équation de chaleur ou de corde vibrante. Par ailleurs, de par sa construction, $w(0, t) = w(L, t) = 0$. Nous pouvons donc d'abord rechercher $w(x, t)$ et ensuite retrouver u à l'aide de la relation (1.12). Nous verrons un exemple plus bas.

1.7.2 Dérivation par rapport à une autre variable.

Qu'en est il pour la dérivation par rapport à une autre variable ? En écrivant

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(n\pi x/L)$$

nous avons concentré toute la dépendance temporelle dans l'amplitude des harmoniques $b_n(t)$. Pour avoir le droit de dériver par rapport à t sous la somme, nous devons pouvoir écrire (le démontrer)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L u(x, t) dx = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} dx$$

L'échange de l'intégrale (sur x) et de la dérivation (par rapport au temps) est permis si $\partial u/\partial t$ existe sur l'intervalle $[0, L]$, est continue et si elle est bornée. Nous supposerons dans la suite que pour les fonctions que nous considérons (qui représentent des hauteurs de cordes, des pressions ou des températures) ces conditions sont toujours vérifiées.

1.8 Équation de la chaleur.

La physique mathématique possède quelques équations "star". Ce sont les équations d'onde (rencontrées plus haut), l'équation de Laplace et l'équation de la

chaleur. Cette dernière décrit les phénomènes de diffusion (de la chaleur, de la concentration, ...) et est de la forme ²

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.13)$$

où u représente la température, la concentration, etc... Si x désigne l'espace et t le temps, nous voyons que D doit avoir la dimension d'une longueur au carré par unité de temps $[L^2/T]$.

Remarquez la différence avec l'équation d'onde (1.9), où la dérivée par rapport au temps est de deuxième ordre. Nous voulons traiter le cas d'une barre (comme d'habitude, de longueur L) dont les extrémités sont maintenues à deux températures *différentes*, disons 0 et T . Nous avons donc les deux conditions aux limites

$$u(0, t) = 0 \quad (1.14)$$

$$u(L, t) = T \quad (1.15)$$

et nous supposons la condition initiale

$$u(x, 0) = f(x) \quad (1.16)$$

Voilà, le problème est maintenant bien posé. Avant de commencer son traitement total, voyons voir si il existe une solution stationnaire, c'est à dire une solution tel que $\partial_t u = 0$. Dans les processus diffusifs, c'est la solution qui est atteinte au bout d'un temps plus ou moins long et correspond à l'équilibre. Il est évident ici que $u_s(x) = T(x/L)$ satisfait parfaitement aux équations (1.13-1.15) et est la solution stationnaire recherchée. Après quelques lignes de calculs, nous trouvons que sa série de sinus est donnée par

$$u_s(x) = \frac{2T}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Bon, revenons maintenant à la solution générale. Nous décomposons la fonction u en série de sinus avec des coefficients dépendant du temps :

$$u(x, t) = \sum b_n(t) \sin(n\pi x/L) \quad (1.17)$$

Nous dérivons une première fois par rapport à x . Mais attention, la fonction u prend des valeurs différentes sur les deux bords, il faut donc ajouter des termes

$$\frac{2}{L} ((-1)^n u(L, t) - u(0, t)) = \frac{2T}{L} (-1)^n$$

2. Voir le chapitre "les équations de la physique" pour la signification de cette équation.

à la série dérivée :

$$\partial_x u(x, t) = \frac{T}{L} + \sum \left[b_n(t) \left(\frac{n\pi}{L} \right) + \frac{2T}{L} (-1)^n \right] \cos(n\pi x/L)$$

Nous sommes maintenant en présence d'une série de cosinus, que nous dérivons encore une fois par rapport à x

$$\partial_x^2 u(x, t) = - \sum \left[b_n(t) \left(\frac{n\pi}{L} \right) + \frac{2T}{L} (-1)^n \right] \left(\frac{n\pi}{L} \right) \sin(n\pi x/L)$$

La dérivation par rapport au temps nous donne une série de sinus dont les coefficients sont $b'_n(t)$. En égalant terme à terme, nous obtenons une équation de premier ordre pour les coefficients

$$b'_n(t) = -D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 b_n(t) - D \frac{2T}{L} \frac{n\pi}{L} (-1)^n$$

dont la solution est

$$b_n(t) = B_n \exp \left[-n^2 (\pi^2 D/L^2) t \right] + \frac{2T}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (1.18)$$

Notons d'abord que quand $t \rightarrow +\infty$, les coefficients b_n tendent vers les coefficients de sinus de la solution stationnaire : au bout d'un temps assez long, la distribution de température dans la barre devient linéaire. Ensuite, les amplitudes des harmoniques sont de la forme $\exp(-n^2 t/\tau)$, où $\tau \sim L^2/D$. L'harmonique d'ordre n "disparaît" donc sur une échelle de temps $\sim L^2/(n^2 D)$. (i) Plus L est grand, plus le temps de "thermalisation" est grand. Si on multiplie par 2 la longueur du barreau, on doit multiplier par 4 le temps nécessaire à la thermalisation³; (ii) Plus le coefficient de diffusion D est grand, plus la thermalisation est rapide : le cuivre est plus rapide à thermaliser que le verre; (iii) plus l'ordre d'une harmonique est important, plus il disparaît rapidement, et ceci est proportionnel au carré de l'ordre. Très rapidement, il ne restera pratiquement que l'harmonique d'ordre 1, qui sera le plus lent à "mourir" (voir figure 1.4).

Nous avons réussi à nous en sortir même quand la dérivation sous la somme posait problème. Mais était-il vraiment nécessaire de faire appel à une telle artillerie lourde, qui numériquement n'est pas entièrement satisfaisant? Et si au lieu de chercher la fonction $u(x, t)$ qui satisfait aux équations (1.13-1.16), nous cherchions la fonction

$$\phi(x, t) = u(x, t) - u_s(x) \quad (1.19)$$

3. Sachant qu'un gigot de 1 kg cuit en une heure au four, quel est le temps de cuisson d'un gigot de 2 kg?

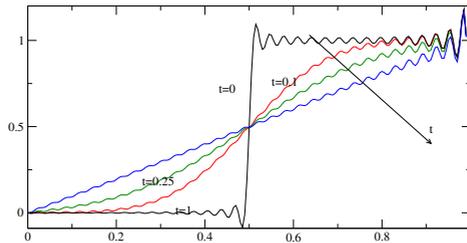


FIGURE 1.4 – Solution de l'équation de la chaleur par les séries de sinus avec $L = 1$, $u(0, t) = 0$; $u(1, t) = 1$, et condition initiale une fonction pallier. La solution est tracée pour 4 temps différents. Nous avons représenté la série par *simplement* ses 64 premières harmoniques. Notez les oscillations artificielles : les séries de sinus ont du mal à reproduire les discontinuités.

Cette fonction obéit bien sûr à l'équation (1.13). Ces conditions aux limites sont

$$\phi(0, t) = u(0, t) - u_s(0) = 0 \quad (1.20)$$

$$\phi(L, t) = u(L, t) - u_s(L) = T - T = 0 \quad (1.21)$$

La fonction ϕ obéit donc (contrairement à u) à des conditions aux limites *continues*, et ne pose donc aucun problème lors de ses dérivations par rapport à x . Sa condition initiale est donnée par

$$\phi(x, 0) = f(x) - u_s(x)$$

Les équations pour ϕ sont donc maintenant bien posées, et nous pouvons les résoudre par la technique habituelle des séries de sinus sans les complications des termes additionnels. Une fois ϕ trouvée, nous avons évidemment trouvé u . La figure (1.5) montre l'avantage (entre autre numérique) de cette dernière méthode.

Problèmes avancés.

1. Vibration d'une corde tendu.

L'exemple de la corde vibrante que nous avons considéré plus haut peut être complété de bien des façons. Si la corde est soumise à un frottement visqueux, il faut ajouter un terme en $-\lambda \partial y / \partial t$ (proportionnel à la vitesse locale) à droite de l'équation (1.9). Si la corde est en plus soumise à une force par unité de longueur $f(x, t)$, il faut également l'ajouter à droite. Résoudre l'équation de la

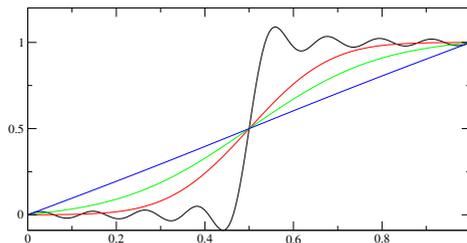


FIGURE 1.5 – La solution de la même équation de la chaleur mais où on a cherché d’abord la fonction ϕ . Nous n’avons pris ici que 16 termes harmoniques. Nous voyons qu’au temps $t = 0$, des oscillations artificielles sont toujours présentes à cause de la discontinuité de la condition initiale. Mais les oscillations artificielles pour des temps ultérieurs de la figure (1.4) ont disparu, puisqu’on a résolu le problème de la discontinuité des conditions aux limites.

corde vibrante (i) en présence d’un frottement (ii) en présence de la force de gravité $f = -\rho g$ (iii) en présence d’une force de rappel harmonique $f = -ky$. Les conditions aux bords sont toujours les mêmes : corde fixée à ses deux extrémités et avec une déformation initiale $y_0(x)$.

2. Vibration d’une barre élastique.

L’équation de vibration d’une barre élastique est donnée par

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

Discuter les solutions de cette équation. Que pensez vous des conditions initiales ?

3. Équation de Schroedinger dans un puits rectangulaire.

Dans un puits de potentiel rectangulaire est très profond, à une dimension, l’équation de Schroedinger s’écrit :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

avec les condition aux limites $\psi(-L, t) = \psi(L, t) = 0$ et $\psi(x, 0) = f(x)$. Discuter de la solution de cette équation en suivant l’exemple de la corde vibrante.

4. Equation de la Chaleur I.

Soit une barre thermiquement isolée, c'est à dire $\partial_x u(0, t) = \partial_x u(L, 0) = 0$. En effet, le flux de chaleur à travers une section est proportionnel à la pente de u en cet endroit, et que "isolée" (pas de flux de chaleur de/vers l'extérieur), impose les conditions ci-dessus. En partant d'une distribution de température initiale parabolique $u(x, 0) = Tx(L - x)/L^2$, résolvez l'équation de la chaleur. A t'on plutôt intérêt à prendre des séries de cosinus ou des séries de sinus ?

5. Équation de la chaleur II.

Si une source de chaleur est présente dans le milieu (sous forme de résistance électrique ou de particule radioactive ...), l'équation de la chaleur prend la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x)$$

où Q est la quantité de chaleur produite en x . Prenez une source constante localisée autour de $L/2$, et résolvez alors l'équation de la chaleur.

6. Equation de la chaleur III.

Nous nous intéressons à la distribution de température dans une barre dont l'un des cotés est maintenu à température constante et l'autre extrémité à une température qui varie dans le temps selon une loi connue. Resolvez

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

avec les conditions aux limites $u(0, t) = 0$; $u(L, t) = g(t)$. Nous supposons une condition initiale homogène $u(x, 0) = 0$ et bien sûr $g(0)=0$. Notez que vous avez intérêt à chercher plutôt la fonction $\phi(x, t) = u(x, t) - g(t)x/L$ pour régulariser les conditions aux limites. Si vous n'aimez pas cette façon de faire, il faut faire attention aux dérivations terme à terme (qui donneront, bien sûr, la même réponse).

7. Énergie d'un corps noir.

Reprenons le cas de la corde vibrante fixée à ses deux extrémités. Quelle est son énergie libre F quand elle est maintenue à une température T ⁴? Ce problème a joué un rôle majeur dans l'évolution de la physique au tournant du XIX^{ème} siècle et a donné lieu à la première formulation de la mécanique quantique.

4. Nous mesurons la température en échelle d'énergie : $T = K_B \theta$, où θ est la température habituelle. Cela nous évite de trainer la constante de Boltzmann.

Avant d'attaquer de front ce problème, quelques rappels sur un cas simple. Prenons un oscillateur harmonique (une boule au bout d'un ressort) dont l'amplitude à un instant est $x(t)$. L'énergie élastique emmagasinée dans l'oscillateur est $E(x) = (k/2)x^2$. L'énergie libre est une sorte de moyenne pondérée par la température de toutes les énergies disponible :

$$Z = e^{-F/T} = \sum_{\{x\}} e^{-E(x)/T} \quad (1.22)$$

où la somme s'entend au sens de toutes les configurations possibles. Comme l'amplitude x est une variable continue, la somme peut être transformée en intégrale et ⁵

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2/2T} dx = C \cdot \sqrt{T/k}$$

L'énergie élastique moyenne de l'oscillateur est

$$\langle E \rangle = \sum_{\{x\}} E(x) e^{-E(x)/T} / Z = T/2$$

Si à la place d'un oscillateur, nous avons deux oscillateurs indépendants (non couplés), x_1 et x_2 de raideur k_1 et k_2 , l'énergie serait

$$E = (1/2)(k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2) \quad (1.23)$$

et la somme (1.22) pour obtenir l'énergie serait cette fois une double intégrale qui se calcule tout aussi facilement. Un calcul élémentaire nous montre alors que l'énergie élastique moyenne est

$$\langle E \rangle = \langle E_1 \rangle + \langle E_2 \rangle = T$$

Pour N oscillateurs, nous aurions $\langle E \rangle = NT/2$, ce qu'on appelle en physique statistique, l'équipartition.

Revenons à notre corde vibrante, dont la hauteur à l'abscisse x est repérée par $u(x)$. L'énergie élastique emmagasiné dans la corde, pour une configuration donnée $u(x)$ vaut ⁶

$$E[u(x)] = \int_0^L k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (1.24)$$

5. Le résultat s'obtient facilement en effectuant le changement de variable $x \rightarrow x\sqrt{T/k}$; la constante C est juste une intégrale définie qui vaut $\sqrt{2\pi}$

6. Pour la signification de cette expression, voir les deux chapitres sur le calcul variationnel et le sens des équations de la physique.

Au lieu de représenter la corde par $u(x)$, nous pouvons le représenter sur la base de Fourier :

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp[(2i\pi n/L)x]$$

et une application simple du théorème de Parseval nous montre que

$$E = \int_0^L k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k \left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 |c_n|^2$$

Remarquez l'expression de droite et comparez le à (1.23). C'est comme si nous étions en présence de N ($N \rightarrow \infty$) oscillateurs harmonique indépendants, l'oscillateur n , d'amplitude c_n ayant une constante de ressort $k(2\pi n/L)^2$. L'énergie moyenne emmagasinée dans la corde est

$$\langle E \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T/2$$

Aïe .. Une simple corde à température non nulle emmagasine une énergie infinie. La raison principale pour cette divergence est la forme (1.24) de l'énergie de la corde : elle n'est valable que pour des petites déformations de la corde. Les modes à grand n (les hautes fréquences) imposent cependant de très fortes déformations. Il est évident que vous ne pouvez pas plier en 10000 une corde de 1m. Il doit donc exister une sorte de longueur minimum qui limiterait les hautes fréquences, et on parle alors de longueur de *cut-off*.

Par contre, la forme (1.24) décrit parfaitement l'énergie du champ électrique (poser $E = \nabla u$) dans une cavité. Bien sûr, il faut prendre un champs électrique tridimensionnel et prendre en compte les diverses polarisations ; cela est légèrement plus long à calculer mais c'est exactement le même genre de calcul. Ce problème que l'on appelle divergence ultra-violet (pour les hautes fréquence spatiale) a été résolu par Planck et Einstein en supposant que l'énergie d'un mode n ne pouvait pas prendre des valeurs continues mais varie par palier discret. Ceci a été la naissance de la mécanique quantique.

8. Le mouvement Brownien.

Considérons une particule sur un réseau discret unidimensionnel de pas a , c'est à dire une particule qui peut sauter de site en site. Appelons α la probabilité de saut par unité de temps autant vers la gauche que vers la droite. Cela veut dire que la probabilité pour que la particule saute à gauche ou à droite pendant un temps infinitésimal dt est αdt (et donc, la probabilité de rester sur place est $1 - 2\alpha dt$). On cherche à déterminer $P(n, t)$, la probabilité pour qu'au temps t ,

la particule se trouve sur le site n , sachant qu'à $t = 0$, la particule se trouvait à $n = 0$ ⁷. Pour que la particule soit en n au temps $t + dt$, il faut qu'il ait été en $n \pm 1$ au temps t , et qu'il ait effectué un saut vers n pendant l'intervalle dt . Ce phénomène enrichit la probabilité d'être en n . Par ailleurs, si la particule se trouvait en n au temps t , il a une probabilité de sauter à gauche ou à droite pendant l'intervalle dt , ce qui appauvrit la probabilité d'être en n . En prenant en compte ces deux phénomènes, on obtient une équation qu'on appelle maîtresse :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dP(n)}{dt} = P(n-1) + P(n+1) - 2P(n) \quad (1.25)$$

Ceci est en fait une infinité d'équations différentielles de premier ordre, avec la condition initiale $P(n=0, t=0) = 1, P(n \neq 0, t=0) = 0$. La série de Fourier est devenue une célébrité en résolvant en particulier ce genre d'équation. La méthode que l'on va suivre est une méthode extrêmement générale. Supposons que les $P(n)$ sont les coefficients de Fourier d'une fonction $\phi(s, t)$

$$\phi(s, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P(n, t) \exp(ins) \quad (1.26)$$

et essayons de voir à quelle équation doit obéir ϕ . Notons tout d'abord que ϕ est 2π -périodique en s . La fonction ϕ est appelée la fonction génératrice des probabilités et caractérise entièrement le processus stochastique. Par exemple, on obtient la moyenne très facilement :

$$\langle n \rangle = \sum nP(n) = -i \left. \frac{\partial \phi}{\partial s} \right|_{s=0}$$

Question : comment on obtiendrai la variance ?

En multipliant l'éq.(1.25) par $\exp(ins)$ et en sommant sur les n , on obtient pour ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -2\alpha(1 - \cos s)\phi$$

Ce qui nous donne, en intégrant l'équation différentielle par rapport à t :

$$\phi = A(s) \exp[-2\alpha(1 - \cos s)t]$$

Et la condition initiale $\phi(s, t=0) = 1$ (pourquoi ?) nous impose $A(s) = 1$. On connaît donc ϕ et on peut par exemple calculer que la variance $\sim 2\alpha t$, qui est un

7. Le mouvement de petites graines de poussière dans l'eau, étudié par Brown à la fin du dix-neuvième siècle, est une version continue de ce mouvement. En 1905, Einstein a donné l'explication de ce mouvement ératique en supposant la nature moléculaire de l'eau. Cet article est celui le plus cité dans le monde scientifique.

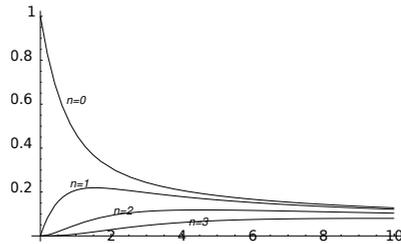


FIGURE 1.6 – Les fonctions $e^{-x} I_n(x)$ pour $n = 0, \dots, 3$. Pour $z \ll 1$, $I_n(2z) \approx z^n/n!$, et pour $z \rightarrow \infty$, $I_n(z) \approx e^z/\sqrt{2\pi z}$.

des résultats important du mouvement brownien. Mais on peut pousser l'analyse plus loin, et calculer explicitement les probabilité. Il existe une classe de fonctions qu'on appelle des fonctions de Bessel d'ordre n que l'on étudiera plus tard dans de ce cours. Ces fonctions (voir Fig.1.6) sont définies par des intégrales :

$$I_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta$$

Cela nous donne directement les $P(n, t)$:

$$P(n, t) = \exp(-2\alpha t) I_n(2\alpha t)$$

On peu à partir de là effectuer une analyse beaucoup plus fine du mouvement Brownien.

9. fluctuation de mort et naissance.

Soit un système (comme par exemple un ensemble de bactéries) dont la taille varie par palier discret de façon aléatoire. Supposons que la probabilité par unité de temps pour qu'il passe de la taille n à $n \pm 1$ soit proportionnelle à n (notez la différence avec le cas brownien). montrez alors que la probabilité $P(n, t)$ pour que le système ait la taille n à l'instant t obéit à l'équation :

$$dP(n)/dt = (n-1)P(n-1) + (n+1)P(n+1) - 2nP(n) \quad (1.27)$$

Nous supposons qu'à l'instant initial $t = 0$, le système a une taille 1 : $P(1, 0) = 1$, $P(n \neq 1, 0) = 0$. Ceci constituera notre condition initiale. Résoudre cette équation n'est pas a priori facile. Posons $u(x, t) = \sum P(n, t) \exp(inx)$, et cherchons si on peut trouver une équation pour cette fonction. Notons tout de suite que de par sa définition, u est 2π périodique. On appelle $u(x, t)$ la *fonction génératrice*. Si on réussit à trouver u , on voit alors que les $P(n, t)$ sont simplement les coefficients de

la transformée de Fourier de cette fonction. Quelle est la condition initiale pour u , c'est à dire $u(x, 0) = ?$ En multipliant les deux côtés de l'équation (1.27) par $\exp(inx)$ et en sommant sur n , démontrez que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2(\cos x - 1) \frac{\partial u}{\partial x}$$

Démontrez que la solution de cette dernière (nous verrons plus tard⁸ comment résoudre ces équations) est donnée par :

$$u(x, t) = \frac{1 - i(1 + 2t) \tan x/2}{1 + i(1 - 2t) \tan x/2}$$

Calculez la moyenne et la variance en fonction du temps. Avec un peu de vigueur en plus, démontrez que

$$\begin{aligned} P(0, t) &= t/(1 + t) \\ P(n, t) &= t^{n-1}/(1 + t)^{n+1} \end{aligned}$$

Discutez ce résultat.

10. Propagation du son dans un cristal (les phonons).

Mise en place du problème. Nous allons considérer un cristal uni-dimensionnel de maille élémentaire a . La position d'équilibre de l'atome n est $x_n = na$. Chaque atome n'interagit qu'avec ses deux plus proches voisins. Nous voulons savoir comment une perturbation des atomes par rapport à leur positions d'équilibre se propage dans le cristal. Soit u_n l'écart de l'atome n par rapport à sa position d'équilibre (Fig. 1.7). La force $f_{n+1 \rightarrow n}$ exercée par l'atome $n + 1$ sur son voisin n est une fonction de la distance entre les deux : $f_{n+1 \rightarrow n} = C(u_{n+1} - u_n)$ où C est un coefficient qui dépend de la nature de la liaison chimique (grand pour les cristaux ioniques ou covalents plus petit pour les cristaux moléculaires). Soit m la masse d'un atome; son équation de mouvement ($\gamma = F/m$) s'écrit, en considérant les forces exercées par ses deux voisins,

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = (C/m)(u_{n+1} - u_n) + (C/m)(u_n - u_{n-1}) \quad (1.28)$$

$$(C/m)(-2u_n + u_{n+1} + u_{n-1}) \quad (1.29)$$

Dorénavant, nous poserons $\omega_0^2 = C/m$.

8. Voir le chapitre sur les équations à dérivées partielles de premier ordre.

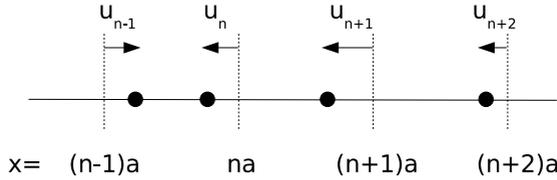


FIGURE 1.7 – Une portion du cristal montrant 4 atomes

Résolution. Nous considérerons les quantités $u_n(t)$ comme les coefficients de Fourier d’une fonction caractéristique $\phi(q, t)$ où la variable q appartient à l’intervalle $[-\pi/a, \pi/a]$ (la longueur de l’intervalle est donc $L = 2\pi/a$). Le paramètre q est souvent appelé “nombre d’onde”. ϕ s’écrit donc

$$\phi(q, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(t) \exp(iaqn) \quad (1.30)$$

1. En multipliant l’équation (1.28) pour l’atome n par $\exp(iaqn)$ et en sommant sur toutes les équations, démontrer que la fonction ϕ obéit à l’équation

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2\omega_0^2(1 - \cos(aq)) \phi = 0 \quad (1.31)$$

[Help : Utilisez et justifiez $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_{n\pm 1} \exp(iaqn) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \exp(iaq(n \mp 1))$].

2. Vérifiez que la solution de cette équation différentielle linéaire homogène de seconde ordre en t est donnée par

$$\phi(q, t) = A(q) \exp(i\omega_q t) + B(q) \exp(-i\omega_q t)$$

où $\omega_q = 2\omega_0 \sin(aq/2)$. [Help : arranger d’abord l’équation (1.31) en exprimant $\cos(2\theta)$ en fonction de $\sin \theta$]. $A(q)$ et $B(q)$ sont des fonctions du paramètre q , mais pas du paramètre t qui peuvent être déterminées à l’aide des conditions initiales, mais nous n’avons pas besoin de les expliciter ici.

3. (i) Donnez enfin la forme des $u_n(t)$. Comme vous pouvez le constater, les u_n peuvent être considérés comme des superpositions d’ondes planes $\exp[i(\omega_q t \pm qna)]$. (ii) La vitesse de propagation d’onde est définie par $v_q = d\omega_q/dq$. Donnez l’expression de v_q et tracez la en fonction de q . Que vaut cette vitesse pour $q \rightarrow 0$ (grande longueur d’onde) et $q \approx \pm\pi/a$?

4. Généralisation. Pouvez-vous indiquer, en suivant rapidement le même chemin que pour les questions précédentes, ce qui changerait si un atome interagissait avec ses 4 plus proches voisins ?

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u_n}{dt^2} &= \omega_0^2 (-2u_n + u_{n+1} + u_{n-1}) \\ &+ \alpha \omega_0^2 (-2u_n + u_{n+2} + u_{n-2})\end{aligned}$$