1 Les transformations de Fourier.

1.1 Entrée en matière.

Nous avons vu plus haut que si une fonction était définie sur un intervalle *fini* de taille L, elle pouvait être approximée aussi précisément qu'on le veuille par les séries de Fourier $\exp(2i\pi nx/L)$. On peut, pour clarifier la notation, poser $q = 2\pi n/L$ et écrire pour notre fonction :

$$f(x) = \sum_q \widetilde{f}_q \exp(iqx) \tag{1.1}$$

où q varierait par pallier discret de $1/L$. Notez également que les coefficients sont donnés de façon fort symétrique

$$\widetilde{f}_q = (1/L) \int_0^L f(x) \exp(-iqx)dx \tag{1.2}$$

C'est en quelque sorte une formule d'inversion que nous devons à l'orthogonalité. Cela est fort sympathique, mais si on voulait approcher notre fonction sur toute l'intervalle $]-\infty, \infty[$? La réponse simple (simpliste) serait que q deviendrait alors une variable continue, la somme se transforme en une intégrale, et nous avons :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}(q) \exp(iqx)dq \tag{1.3}$$

et par analogie avec (1.2), on doit avoir

$$\widetilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iqx)dx \tag{1.4}$$

On appelle les équations (1.3,1.4) des transformations de Fourier : prenez votre fonction, multipliez par $\exp(-iqx)$, intégrez sur $]-\infty, +\infty[$, et hop, c'est prêt. Notez la beauté de la symétrie : si $\widetilde{f}(q) = \mathrm{TF}[f(x)]$ alors $f(-x) = (1/2\pi)\mathrm{TF}[\widetilde{f}(q)]$. Par convention, on met un petit chapeau sur la TF pour distinguer la fonction originale de la fonction transformée. La variable q est la variable réciproque de x. Pourquoi ce facteur 2π doit apparaître dans la TF inverse ? En faite, si nous définissions la TF par [multiplier par $\exp(2i\pi qx)$ et intégrer] la TF et son inverse seraient parfaitement symétrique, et certaines personnes préfèrent cette dernière définition. Cela nous obligerait cependant à traîner des 2π lors des dérivations et des changements de variables et nous préférons donc la définition (1.4).

La signification de la TF est la suivante : une fonction $f(x)$ peut être considérée comme la superposition d'oscillations pures $\exp(iqx)$, chaque oscillation ayant un poids

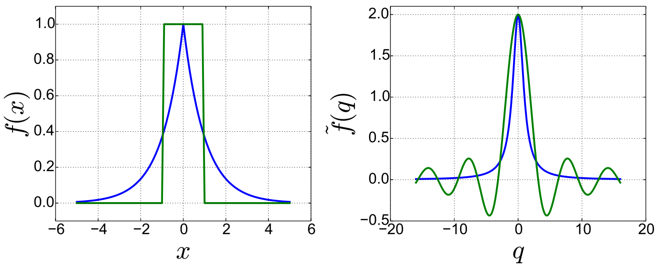

FIGURE 1.1 – Quelques exemples de fonctions et de leurs transformées de Fourier. En bleu, la fonction $\exp(|x|)$; en vert, la fonction $\Pi(x)$.

$\tilde{f}(q)$. Cette signification, comme nous l'avons dit, est juste une généralisation des séries de Fourier. La TF est un exemple d'opérateur linéaire, c'est à dire une boite noire qui prend une fonction en entrée et produit une nouvelle fonction en sortie, et fait cela de façon linéaire, c'est à dire :

$$\mathrm{TF}[\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda \mathrm{TF}[f(x)] + \mu \mathrm{TF}[g(x)]$$

Voyons pour l'instant quelques exemples.

1. $f(x) = e^{-k|x|}$. Il est facile de démontrer que $\tilde{f}(q) = 2k/(k^2 + q^2)$. La formule d'inversion est un peu plus compliqué à démontrer, et nécessite quelques éléments de la théorie des variables complexes.

2. La fonction $\Pi(x)$, appelée *porte*, est définie par $\Pi(x) = 0$ si $|x| > 1$ et $\Pi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$. Sa TF est donnée par $\tilde{f}(q) = 2\sin(q)/q$. Cette fonction joue un rôle important dans la théorie de la diffraction.

Nous n'avons pas énoncé dans quelle condition les TF existent. Une condition suffisante évidente serait que f doit être sommable. Nous ne rentrons pas plus dans le détail, disons simplement qu'en général, les résultats obtenus sont radicalement aberrants si on a violé les limites permises.

Exercices.

1. Démontrer la formule donnée pour la TF de $k\exp(-k|x|)$. Que devient cette transformée si $k \to +\infty$?
2. Calculer la TF de la fonction $f(t) = H(t)\exp(-\nu t)$. $H(t)$ est appelé la fonction d'Heaviside (Physicien anglais de la fin du XIXème). Elle est nulle pour $t < 0$ et vaut 1 pour $t \geq 0$.
3. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $a^{-1}\Pi(x/a)$. Que devient cette transformée quand $a \to 0$?

4. Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$, calculez la TF de $\exp(-x^2/2)$. Pour cela, notez que $x^2 + 2iqx = (x + iq)^2 + q^2$. Le résultat d'intégration reste valable si on parcours un axe parallèle à l'axe réel.
5. Calculez la TF de $a^{-1} \exp[-x^2/2a^2]$. Que devient cette transformée quand $a \to 0$?
6. Calculer la TF d'un "train d'onde", $f(x) = \Pi(x/a) \exp(ik_0x)$. k_0^{-1}est la période de l'onde et a son extension spatial. Discutez les divers limites.

1.2 Les opérations sur les TF.

Si les TF sont si intéressante, c'est en partie parce qu'elles nous permettent de manipuler les équations différentielles comme des équations algébriques. Ceci est un peu l'analogue de l'invention des logarithme par monsieur Neper au début des années 1600. Il est difficile de multiplier deux grands nombres. On prend alors le log de chacun (en consultant une table), on *additionne* (au lieu de multiplier) les deux nombres obtenus, et on prend l'antilog du résultat. C'est presque la même chose pour les équations différentielles et les TF : on prend la TF des équations (parfois en consultant une table), on résout l'équation *algébrique* correspondante, on prend la TF inverse du résultat. Pour cela, nous devons connaître quelques règles de manipulation des TF, l'équivalent des règles comme $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ pour les logarithme. Voyons cela de plus près.

Translation. Si $\text{TF}[f(x)] = \tilde{f}(q)$ alors $\text{TF}[f(x-a)] = \exp(-iqa)\tilde{f}(q)$

Translater dans l'espace direct revient à multiplier par un facteur de phase dans l'espace réciproque. Le changement de variable $x \to x + a$ (si on remplace x par $x + a$) nous donne la démonstration :

$$\int f(x-a)e^{-iqx}dx = e^{-iqa} \int f(x)e^{-iqx}dx$$

Inversion. Si $\text{TF}[f(x)] = \tilde{f}(q)$, alors $\text{TF}[f(-x)] = \tilde{f}(-q)$

Changement d'échelle. Si $\text{TF}[f(x)] = \tilde{f}(q)$, alors $\text{TF}[f(x/a)] = a\tilde{f}(qa)$

La dilatation d'échelle dans l'espace direct conduit à la contraction d'échelle dans l'espace réciproque. Cela se démontre par le changement de variable $x \to ax$, comme ce que vous avez fait dans les exercices 1 et 3 ci-dessus. Nous avons en réalité supposé que $a > 0$. Dans le cas général, on doit écrire $\text{TF}[f(x/a)] = |a|\tilde{f}(qa)$.

Dérivation. Si $\text{TF}[f(x)] = \tilde{f}(q)$, alors $\text{TF}[df(x)/dx] = iq\tilde{f}(q)$.

Dériver dans l'espace direct revient à multiplier par iq dans l'espace réciproque. C'est là le grand avantage qui permet de transformer les équadifs en équation algébrique dans l'espace réciproque. Pour démontrer cela, il faut simplement effectuer une intégration par partie, et noter que puisque f est sommable, $f(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$.

1.3 Transformée de Fourier Rapide.

Une des raisons qui a grandement popularisé les TF est la disponibilité, depuis le début des années 1960, des alghorithmes qui permettent de les calculer efficacement. La première étape pour traiter numériquement un signal est de l'échantillonner, c'est à dire de le mesurer et de l'enregistrer tous les pas de temps Δt. Le son sur un CD est par exemple échantillonée à 48 KHz, c'est à dire 48000 enregistrement de l'amplitude par seconde. Nous sommes alors en possession de N nombres (qui sont les $f_n = f(n\Delta t)$). Normalement, si on voulait calculer la TF, on devrait effectuer N^2 opérations (de multiplications et d'addition). Les transformés de Fourier Rapide (ou FFT, pour fast fourier transform en anglais) n'effectuent pour ce calcul que $N \log N$ operations. La différence est enorme en temps de calcul. Par exemple, en supposant que notre ordinateur effectue un milliard d'operations par seconde, la TF d'une seconde d'un CD prendrait environ 2 secondes, tandis que sa TFR ne prendrait que 0.5 ms. C'est cette différence qui permet d'analyser le signal en "temps réél".

1.4 Manipulation et utilisation des TF.

Filtrage.

Un filtre ne laisse passer que certaines fréquences. Par exemple, pour la réception radio de France Info, on règle un circuit électrique pour ne laisser passer que le 105.5 MHz. En optique, on fait souvent un filtrage spatial pour "nettoyer" un faisceau laser et enlever les speackles. Le principe est toujours le même : nous avons un signal $x(t)$ en entrée et un signal $y(t)$ en sortie. Dans le cas d'un circuit RLC, ils sont reliés par une équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = x(t)$$

Une habitude veut que la variable réciproque est notée q(ou k) quand la variable directe est x, et ω (ou ν) quand la variable directe est t. En prenant la TF des deux côtés de l'équation, on obtient

$$\tilde{y}(\omega) = \frac{\tilde{x}(\omega)}{(-\omega^2 + i\alpha\omega + \omega_0^2)} \tag{1.5}$$

Le signal en entrée $x(t)$ est la superposition d'oscillations pures $\exp(i\omega t)$, chaque oscillation ayant un poids $\tilde{x}(\omega)$. L'équation (1.5) montre comment le poids de chacune de ces oscillations est modifié en sortie. Le signal (temporel) en sortie est la superposition de ces oscillations avec le poids $\tilde{y}(\omega)$. L'amplitude du poids de la fréquence ω en entrée est donc divisée par $[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \alpha^2\omega^2]^{1/2}$. Chaque composante de sortie subit également un déphasage $\phi = \arctan[(\omega_0^2 - \omega^2)/\alpha\omega]$.

Il existe bien sûr autant de filtre que de problème à traiter. Les images issues de la microscopie éléctronique sont souvent brouillées par des pixels aléatoires. Pour nettoyer ces images, on filtre les hautes fréquences : on prend la TF de l'image (c'est une TF à deux dimensions) et on "coupe" les hautes fréquences, en mulitpliant la TF par une fonction d'Heaviside $H(q_0 - q)$ où q_0 est la fréquence (spatiale) de coupure. On prend alors la TF inverse et l'image résultantes a été nettoyé du bruit aléatoire. Bien sûr, dans l'opération, on a aussi perdu peut-être quelques informations. L'opération peut-être résumé comme suit : $I_n(\mathbf{x}) = \mathrm{TF}^{-1}[H(q_0 - q)\mathrm{TF}[I(\mathbf{x})]]$.

TF de $H(t)\cos(\omega_0 t)$.

Nous souhaitons calculer la TF de la fonction $f(t) = H(t)\cos(\omega_0 t)$ où $H(t)$ est la fonction d'Heaviside. Cela paraît à priori problèmatique, la fonction $\cos(\omega_0 t)$ ne tendant pas vers zero pour $t \to +\infty$. Calculons plutôt la TF de la fonction $f_\nu(t) = H(t)\exp(-\nu t)\cos(\omega_0 t)$. Pour $\nu > 0$, cette fonction converge rapidement vers zéro et son intégrale est très bien définie. Donc,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\nu(\omega) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{-(\nu - i\omega_0)t} + e^{-(\nu+i\omega_0 t)}\right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{\nu + i\omega}{(\nu+i\omega)^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

Maintenant, si on prend la limite $\nu \to 0$, nous voyons que $f_\nu(t) \to f(t)$ (pas uniformément), et que la transformée de Fourier tend également vers une limite bien définie. Nous posons donc :

$$\tilde{f}(\omega) = i\frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Bien sûr, si on voulait prendre la TF inverse, on aurait à nouveau des problèmes pour l'intégration autour des singularités $\omega = \pm\omega_0$. On s'en sort en prenant la *valeur principale* des intégrales. Quelques connaissances de la théorie d'integration dans le plan complexe nous montre alors qu'on trouve bien le bon résultat [1]. Le lecteur peut démontrer, en suivant une démarche analogue, que

$$\mathrm{TF}\left[H(t)\sin(\omega_0 t)\right] = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Théorie de la diffraction de la lumière et de la formation d'image.

Considérons un rayon de lumière qui se propage d'un point A à un point B . Si la phase du champs au point A est $\exp(i\omega_0 t)$, elle est de $\exp(i\omega_0 t + \phi)$ au point B. ω_0 est (à 2π près) la fréquence de la lumière (de l'ordre de $10^{14}\mathrm{s}^{-1}$ pour la lumière visible) et ϕ est le déphasage dû au temps que la lumière met pour aller de A à B (distant de l) :

$$\phi = \omega_0 \Delta t = 2\pi f \frac{AB}{c} = 2\pi \frac{l}{\lambda}$$

où λ est la longueur d'onde de la lumière (entre 0.3 et 0.8 micron pour la lumière visible). Le lecteur connaît sans doute tout cela depuis le premier cycle universitaire.

Chaque point d'un objet recevant une onde lumineuse peut être considéré comme une source secondaire. Si $a\exp(i\omega_0 t)$ est le champs qui arrive au point P, le champs émis est

1. Cela est en dehors du champs de ce cours.

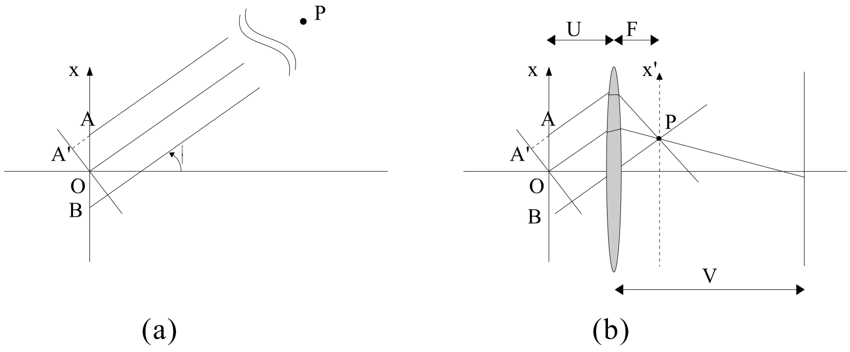

FIGURE 1.2 – Formation d'image vu comme une double transformée de Fourier.

$ar \exp(i\omega_0 t + i\phi)$. Le coefficent r (≤ 1) désigne l'absorption de la lumière au point P. Le coefficient ϕ est le déphasage induit au point P si par exemple en ce point, le matériaux a un indice différent de son environnement. Le coefficient complexe $T = r\exp(i\phi)$ est le coefficient de transmission du point P. Un objet est donc caractérisé par une fonction complexe $f(\mathbf{x})$ qui est son coefficient de transmission pour chacun de ses points $\mathbf{x}$.

Considérons maintenant une onde plane arrivant sur un objet (qui pour plus de simplicité, nous considérons unidimensionnel) et un point P à l'infini dans la direction θ (Fig. 1.2(a)). Le champ reçu en ce point est la somme des champs secondaire émis par les divers points de l'objet. Par rapport au rayon OP que l'on prend comme référence, le rayon AP aura un déphasage de $\phi = -2\pi AA'/\lambda = -(2\pi/\lambda)x\sin(\theta)$. En appelant $q = (2\pi/\lambda)\sin(\theta)$, et en appelant $f(x)$ la fonction de transmission de l'objet, nous voyons que le champs au point P vaut

$$\int f(x)\exp(-iqx)dx$$

qui n'est rien d'autre que la TF de la fonction f.

Mettons maintenant une lentille à une distance U en face de l'objet, une image se formera dans un plan à distance V de la lentille (Fig. (b)). Les rayons qui partaient dans la direction θ vont maintenant se focaliser dans le plan focal arrière de la lentille (distant de F) en un point P dont la coordonée x' vaut $F\tan\theta \approx F\sin\theta$ tant que l'angle θ n'est pas trop important. Nous en déduisons l'intensité du champ $g(x')$ dans le plan focal arrière de la lentille :

$$g(x') = \int f(x)\exp\left(-i(\frac{2\pi}{\lambda F})x'.x\right)dx = \tilde{f}(\frac{2\pi}{\lambda F}x')$$

Il n'est pas trop difficile de démontrer que l'image formée est la TF du plan focal arrière, nous laissons cela au soin du lecteur. La formation d'image peut donc être vu comme une double transformation de Fourier. Cela ouvre de grandes perspectives pour effectuer des opérations de filtrage directement dans le pfa d'une lentille. Voir des objets transparents, comme par exemple des cellules dans l'eau n'est pas possible en microscopie classique. Zerniké, dans les années 1950, a inventé une technique appelé contraste de phase, qui consiste à introduire des filtres dans le pfa de l'objectif et permet la visualisation des objets transparents sous microscope.

Énergie injecté dans un oscillateur.

Soit une particule dans un puits harmonique ($E_p = (1/2)kx^2$) soumis à une force extérieure $F(t)$. Nous désirons savoir quelle énergie cette force transfert à la particule. L' équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = (1/m)F(t) \tag{1.6}$$

où $\omega_0^2 = k/m$ est la fréquence propre d'oscillation de la particule. Nous supposons qu'au temps T_1du début, l'osciallateur est au repos. L'énergie totale transférée à l'oscillateur est donc la somme de son énergie cinétique et potentielle au bout d'un temps T_2 (que nous prendront égale à $+\infty$ par la suite).

Notons tout de suite que la gauche de l'équation (1.6) peut s'écrire $(d/dt - i\omega_0)(d/dt + i\omega_0)x$. Comme nous allons voir, cette décomposition a son utilité. En mécanique quantique, on appellerai l'analogue de ces termes des opérateurs de création et d'annihilation qui sont fréquemment utilisé. Par ailleurs, H, L'énergie totale [2] du système (cinétique + potentielle), s'écrit :

$$\begin{aligned}(2/m)H &= (dx/dt)^2 + \omega_0^2 x^2 \\ &= (dx/dt - i\omega_0 x)(dx/dt + i\omega_0 x)\end{aligned}$$

Si on pose $z = dx/dt + i\omega_0 x$, nous aurons alors $(2/m)H = zz^*$, et l'équation (1.6) se transforme en

$$dz/dt - i\omega_0 z = (1/m)F(t) \tag{1.7}$$

L'énergie transférée à l'osciallateur est $\Delta E = H(T_2) - H(T_1) = H(T_2)$. Multiplions maintenant les deux cotés de l'équation (1.7) ci-dessus par $\exp(-i\omega_0 t)$ et intégrons entre T_1et T_2

$$\int_{T_1}^{T_2} (dz/dt - i\omega_0 z)e^{-i\omega_0 t}dt = (1/m)\int_{T_1}^{T_2} F(t)e^{-i\omega_0 t}dt$$

Il nous suffit maintenant d'effectuer une integration par partie du côté gauche de l'intégrale et d'utiliser le fait que l'oscillateur est au repos à l'instant T_1pour trouver que ce côté vaut $z(T_2)\exp(-i\omega_0 T_2)$. Comme en plus l'oscillateur est au repos avant T_1, on peut étendre l'intégrale à $-\infty$. Quand $T_2 \to +\infty$, le côté droit devient égale à la TF de F évaluée pour la fréquence ω_0, et nous avons

$$\Delta E = \frac{1}{2m}\tilde{F}(\omega_0)\tilde{F}^*(\omega_0)$$

2. En mécanique analytique, on appelle Hamiltonien l'énergie totale du système, d'où le H. Comme le système n'est pas isolé, H n'est pas une constante du mouvement : $H = H(t)$

Pour connaître l'énergie totale transférée à l'oscillateur, nous n'avons pas à résoudre l'équation différentielle de second ordre avec second membre, évaluer simplement la TF de la Force appliquée à la fréquence propore de l'oscillateur nous suffit.

Vous pouvez donc facilement calculer l'énergie transférée dans les cas suivants :

1. $F(t) = f_0 e^{-t/t_0}$ si $t \geq 0$; sinon, $F(t) = 0$.
2. $F(t) = f_0 \Pi(t/t_0)$
3. $F(t) = f_0$ si $t \geq 0$; sinon, $F(t) = 0$
4. $F(t) = f_0 \cos(\omega_1 t)$

Dans les cas 1 et 2, discutez le transfert d'énergie en fonction du temps t_0. Pour résoudre le cas 3 et 4, vous aurez besoin des résultats sur les distributions disponible dans les prochains chapitres.

1.5 Relation entre les séries et les transformés de Fourier.

Nous avons indiqué au début du chapitre, sans le démontrer, que l'on passe des séries au transformés de Fourier en laissant la longueur de l'intervalle L tendre vers l'infini. Revoyons ce passage avec quelques détails maintenant. Considérons une fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[-L/2, L/2]$. Ses coefficients de Fourier (complexe) sont donnés par

$$c_q = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-iqx} dx$$

où pour plus de simplicité, nous notons $q = 2\pi n/L$. Désignons par $I(q)$ l'intégrale ci-dessus (sans le facteur $1/L$ donc). Par définition, nous avons pour $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{q, 2\pi/L} (1/L) I(q) e^{iqx}$$

où dans la somme, l'indice q varie par pas discret $dq = 2\pi/L$. Quand $L \to \infty$, $dq \to 0$ et par définition de l'intégrale de Riemann, la somme ci-dessus tend vers

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I(q) e^{iqx} dq$$

Par ailleurs, il est évident que quand $L \to \infty$, $I(q)$ tend vers $\tilde{f}(q)$ donnée par l'équation (1.4).

1.6 Approfondissement : TF à plusieurs dimensions.

Nous nous occupons dans ce cours essentiellement des fonctions à une seule variable $f(x)$. Ces concepts cependant se généralisent sans problème à plusieurs variable. Si nous notons les variables de façon vectorielle

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$$

alors la TF est définie comme

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}}d\mathbf{x} \tag{1.8}$$

où $\mathbf{k}.\mathbf{x} = k_1x_1 + ...k_dx_d$ désigne le produit scalaire. De même, la TF inverse est

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}}d\mathbf{k}$$

Étudions deux cas particuliers que nous rencontrons souvent.

1.6.1 Symétrie cylindrique.

Dans le premier cas, $d = 2$ et la fonction est à symétrie cylindrique : $f(\mathbf{x}) = f(r)$ où $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. La fonction $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ en est un bon exemple. Il est évident que dans un tel cas, nous avons intérêt à utiliser les coordonnées polaire. Dans ce cas,

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r)e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}}rdrd\theta$$

Le problème consiste à calculer le facteur $\exp(-i\mathbf{k}.\mathbf{x})$. La coordonnées θ désigne l'angle entre le vecteur $\mathbf{x}$ et l'axe des x. Cependant, si nous tournons l'axe des x pour l'aligner sur l'axe de $\mathbf{k}$, la fonction $f(\mathbf{x})$ ne change pas, puisqu'elle est de symétrie cylindrique. Dans ce cas, θ désigne l'angle entre le vecteur $\mathbf{x}$ et le vecteur $\mathbf{k}$ et

$$\mathbf{k}.\mathbf{x} = kr\cos\theta$$

où $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$

L'intégration sur θ nous donne

$$\int_0^{2\pi} e^{-ikr\cos\theta}d\theta = 2\pi J_0(kr)$$

La fonction $J_0(z)$ est appelée la fonction de Bessel d'ordre 0 et apparaît en physique mathématique à de très nombreuse endroit. Les fonctions de Bessel jouent le rôle des fonctions trigonométrique en coordonnées polaires. Nous avons donc

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = 2\pi\int_0^\infty rf(r)J_0(kr)dr \tag{1.9}$$

Il est évident que la fonction $\tilde{f}(\mathbf{k})$ est également de symétrie cylindrique et la TF inverse est

$$f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty kf(k)J_0(kr)dk$$

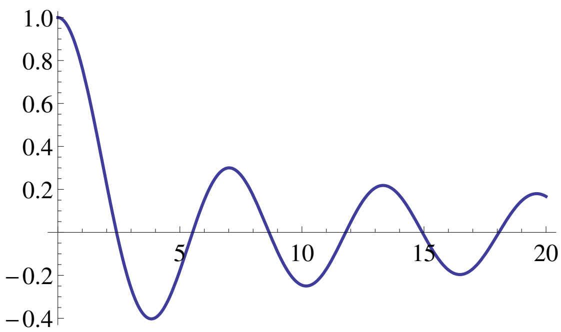

FIGURE 1.3 – La fonction $J_0(x)$

1.6.2 Symétrie sphérique.

Étudions maintenant le cas $d = 3$ où la fonction est à symétrie sphérique. En répétant les arguments ci-dessus pour les coordonnées sphériques, nous aboutissons à

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r) e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

L'intégration sur ϕ nous donne juste un facteur 2π. Par ailleurs,

$$\int_0^\pi e^{-ikr\cos\theta} \sin\theta d\theta = 2\frac{\sin(kr)}{kr}$$

et donc finalement

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{k} \int_0^\infty r f(r) \sin(kr) dr$$

En faisant le même chemin pour la TF inverse, nous avons

$$f(r) = \frac{-1}{\pi r} \int_0^\infty k f(k) \sin(kr) dk$$

Exercice. Calculer la Transformée de Fourier de

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\sigma}\right)$$

aux dimensions $d = 1, 2, 3$.