1 Éléments d'analyse fonctionnelle.

Les espaces vectoriels jouent un rôle unificateur fondamental en mathématiques. Peut-être cela rappelle au lecteur des souvenirs de matrices, de bases et de ses changements, ... Nous allons revoir tout cela de façon assez légère mais surtout appliquée à l'ensemble extrêmement vaste des *fonctions*. Nous allons voir que nous pouvons décrire les fonctions comme des *vecteurs* dans des espaces de dimensions infinies, en utilisant pratiquement les mêmes outils que pour des vecteurs à trois dimensions. Cela s'appelle *analyse fonctionnelle* et a été formalisé par Hilbert au début des années 1900. Le reste de ce cours s'appuie constamment sur les résultats de ce chapitre dont la lecture est indispensable.

1.1 Les espaces vectoriels.

Qu'est ce qu'un espace vectoriel ? Nous connaissons déjà certains ensemble célèbre comme celui des nombres réels $\mathbb{R}$ ou complexes $\mathbb{C}$. On les appellera dans la suite indifféremment l'ensemble des scalaires $\mathbb{S}$. Un espace vectoriel est un ensemble $\mathcal{E}$ où l'opération $+$ a un sens. Pas n'importe quel sens d'ailleurs, mais ce qu'on associe instinctivement [1] à cette opération : (i) si a et b appartiennent à notre ensemble, alors $a+b$ aussi ; (ii) $a+b=b+a$. En plus, multiplier un vecteur par un scalaire a un sens, qui plus est, lui aussi "très naturel" : si $s, s_1, s_2 \in \mathbb{S}$ et $a, b \in \mathcal{E}$, alors : (i) $sa \in \mathcal{E}$; (ii) $(s_1+s_2)a = s_1a + s_2a$; (iii) $s(a+b) = sa + sb$; (iv) $\mathcal{E}$ possède un élément *zéro*, qu'on notera $\mathbf{0}$ [2] tel que $a + \mathbf{0} = a$, $a, \mathbf{0} \in \mathcal{E}$. N'oublions pas que quand on parle de sa, on parle bien d'un *vecteur* et non d'un *scalaire*. L'ensemble des maisons d'une ville par exemple n'a pas vraiment une structure d'espace vectoriel. Par contre, l'ensemble des vecteurs dans un plan, l'ensemble des polynômes, ou l'ensemble des fonctions définies sur $[0,1]$ ont une structure d'espace vectoriel. L'intérêt majeur est que tout [3] ce que l'on peut affirmer pour l'un de ces ensembles (en rapport avec son caractère vectoriel) pourra être généralisé aux autres.

Bases d'espace vectoriel. Une base est l'ensemble de certains éléments de notre espace $\mathcal{E}$ qui nous permet de décrire tout les autres. Pour être plus rigoureux, supposons que $e_1, e_2, e_3, ..., e_i \in \mathcal{E}$, soit une base. Dans ce cas, pour n'importe quel élément a de $\mathcal{E}$, on peut trouver des scalaires (des chiffres donc) s_i tel que $a = \sum_i s_i e_i$. On dit que a est une combinaison linéaire des vecteurs e_i. Bien sûr, il faut prendre le minimum de e_i qui rende cette description faisable. Pour cela, il suffit d'exiger qu'aucun des e_i ne puisse

1. un instinct forgé par une douzaine d'année d'étude.
2. En caractère gras pour ne pas le confondre avec le 0 des scalaires.
3. Bon, il faut, de temps en temps, prendre des précautions.

être une combinaison linéaire des autres (on dit alors que ces vecteurs sont linéairement indépendant). Les scalaire s_i qu'on aura trouvé pour la description de a sont alors unique. On les appelle les *composantes* du vecteur a dans la base $\{e\}$.

Le grand intérêt des bases est qu'elles nous permettent de manipuler les vecteurs comme des collections de chiffres. Pour les vecteurs dans le plan, nous ne sommes pas obligé de faire des dessins, nous pouvons les représenter par des duplets (x_1, x_2) si nous nous sommes fixés à l'avance deux vecteurs de références. A partir du moment où on peut représenter les objets par des chiffres, on peut pratiquement tout faire (hem).

Pour l'espace vectoriel des polynômes, les polynômes $1, X, X^2, ...$ constituent une base. Une autre serait $\{1, (1-X), (1-X)^2, ...\}$. Bien sûr, le choix de la base n'est pas unique. On peut cependant remarquer que l'ensemble des vecteurs du plan est de dimension 2 (il suffit de deux vecteurs pour définir une base), tandis que l'ensemble des polynômes est de dimension infinie. Ce n'est pas une très grande infinie, le nombre d'éléments dans la base qui couvre les polynômes est le même que celui des nombres dans $\mathbb{N}$. On dit alors que c'est une infinie dénombrable [4].

Quand est il de l'espace des fonctions ? A priori, c'est un espace d'une très grande dimension. On verra par la suite que si on se donne quelques restrictions, on peut également définir une base *dénombrable* pour cet espace. C'est un des théorèmes les plus fascinants d'analyse.

Le produit scalaire. On peut enrichir la structure d'espace vectoriel en rajoutant d'autres opération que le + et le produit par un scalaire. L'opération la plus utile à définir pour l'Analyse est le *produit scalaire* (qu'on appelle également le produit intérieur). Le produit scalaire est une opération qui, à deux *vecteurs*, associe un *scalaire* [5]. Nous noterons le produit scalaire de deux vecteurs (a, b). En physique, on a plus l'habitude de le noter par $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$, en mécanique quantique par $\langle a | \, b \rangle$.

Nous sommes assez habitués depuis les années du lycée avec ce concept. Un "bon" produit scalaire doit avoir ces quelques propriétés :

(i) $(sa, b) = s(a, b)$ où $s \in \mathbb{S}$, et $a, b \in \mathcal{E}$.

(ii) $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$. où $a, b, c \in \mathcal{E}$.

(iii) $(a, a) \in \mathbb{R}$ et $(a, a) > 0$ si $a \neq \mathbf{0}$ et $(a, a) = 0$ si $a = \mathbf{0}$.

Par exemple, dans l'ensemble des vecteurs du plan, on peut définir un produit scalaire par $(a, b) = \sum x_i y_i$ où x_i et y_i sont les composantes des deux vecteurs a et b.

La propriété (iii) est très intéressante. Elle nous permet de définir la *longueur* d'un vecteur, qu'on appelle sa *norme* et que l'on note $\|a\|^2 = (a, a)$. L'intérêt de pouvoir disposer d'une norme est immense. On peut par exemple savoir si deux vecteurs a, b sont "proches" l'un de l'autre en regardant la norme de leur différence $\|a - b\|$, ce qui nous permet à son tour de définir la notion de limite (souvenez vous, les $\forall$blabla, $\exists$blabla tel que blablabla ...). Cela paraît évident si l'on parle des vecteurs d'un plan, ça l'est beaucoup

4. C'est le plus petit des infinis. Sans rentrer dans les détails, l'infini qui ensuite est vraiment plus grande que $\mathbb{N}$ est celui de $\mathbb{R}$. L'ensemble de toutes les fonctions est une infinie encore plus grande.

5. $(.,.) : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{S}$.Si l'espace vectoriel est associé aux réels (complexes), le scalaire est un réel (complexe).

moins quand on discute des espaces vectoriels plus riches comme celui des fonctions. Est ce que par exemple, on peut dire que la fonction sin(.) et log(.) sont proches ?

Nous avons besoin aussi de préciser la commutativité. Nous exigeons du produit scalaire :

(iv) $(a,b) = (b,a)$ si $\mathcal{E}$ est associé aux réels ;

(iv') $(a,b) = (b,a)^*$ si $\mathcal{E}$ est associé aux complexes.

Par exemple, pour les vecteurs de $\mathbb{C}^2$, on peut définir le produit scalaire de a, b par $\sum_i x_i y_i^*$ où x_i, y_i sont les composantes de a et b. Notez bien que l'on doit multiplier la composante de l'un par le complexe conjugué de l'autre si on veut respecter la propriété (iii) et disposer d'une norme [6]. La propriété (iv) ou (iv)', combinée à la propriété (i) nous donne :

(i') $(a, sb) = s(a,b)$ si $\mathcal{E}$ est associé aux réels ;

(i") $(a, sb) = s^*(a,b)$ si $\mathcal{E}$ est associé aux réels.

L'orthogonalité. Nous nous souvenons que pour les vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, deux vecteurs ($\neq \mathbf{0}$) sont perpendiculaires (qu'on note $a \perp b$) ssi leur produit scalaire est nul. Nous acceptons cette définitions pour tout espace vectoriel. On appelle une base orthogonale une base telle que tout ses éléments soit perpendiculaire l'un à l'autre. Nous avons un avantage fantastique à utiliser des bases orthogonales. D'abord, si les vecteurs $e_1, e_2, ...$ sont orthogonale les uns aux autres, ils sont linéairement indépendant. Si notre espace vectoriel est de dimension n, il nous suffit donc de trouver n vecteurs tous $\perp$les uns aux autres et le tour est joué : nous disposons d'une base !

On peut exiger encore plus d'une base : qu'elle soit orthonormée, c'est à dire que la norme de tous ses éléments soit l'unité. Si nous disposons d'une base orthonormé, on peut trouver les composantes d'un vecteur quelconque de façon extrêmement simple : si a est un vecteur et $(e_1, ...e_n)$ une base orthonormée, alors $a = \sum (a, e_i) e_i$, c'est à dire que la composante de a selon e_i est (a, e_i). Comme exemple, prenez le cas des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$.

Exercices.

1. Démontrer que les deux vecteurs $(1,0)\,(0,1)$ forment une base pour l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ associé à $\mathbb{C}$. Même chose pour les deux vecteurs $(i,0)$ et $(0,i)$.
2. Démontrer que si $\|a-b\| = 0$, alors $a = b$.
3. Démontrer que pour l'espace des matrices $n \times n$, $\sum a_{i,j} b_{i,j}$ est un produit scalaire. Ce produit scalaire est souvent utilisé en analyse matricielle numérique pour l'évaluation de la stabilité des méthode itératives.

6. Un exemple intéressant de "produit scalaire" qui ne *respecte* pas (iii) est donné par la relativité restreinte. On repère un *événement* par ses quatre coordonnées spatio–temporelles (x, y, z, t) et le produit scalaire de deux événement est défini par $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2$. Deux événement *distincts* peuvent donc être à distance nulle l'un de l'autre.

4. Démontrer que si n vecteurs sont mutuellement orthogonaux, alors ils sont linéairement indépendants.
5. Démontrer que si $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base orthonormée, alors n'importe quel vecteur a peut s'écrire sous la forme
$$a = \sum_{i=1}^{n} (a, e_i) e_i$$
Comment doit on modifier cette formule si la base est simplement orthogonal, mais pas orthonormée ?
6. En réalité, une norme pour pouvoir légalement porter ce nom, doit respecter l'inégalité triangulaire :
$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$
Démontrez que la norme définie par le produit scalaire vérifie cette inégalité. Pour cela il faut d'abord démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$|(a, b)|^2 \leq \| a\|.\|b\|$$
qu'on peut assez facilement démontrer en considérant le produit $(a+\lambda b, a+\lambda b) \geq 0$.
7. Pouvez vous généraliser le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ à l'espace des polynômes ? Et surtout démontrer qu'il respecte toutes les propriétés d'un produit scalaire ?
8. Un operateur linéaire est une fonction linéaire de l'espace vectoriel dans lui même : il prend un vecteur en entrée et produit un vecteur en sortie. La linéarité veut dire que si L est un opérateur linéaire, a, b deux membres quelconques de l'espace vectoriel et λ, μ deux scalaires, alors
$$L(\lambda a + \mu b) = \lambda L(a) + \mu L(b)$$
(N'oublions pas que $L(a)$ et $L(b)$ sont des vecteurs au même titre que a et b). Si on se donne une base $\{e_i\}$, l'operateur peut être caractérisé par son action sur *chaque* vecteur de la base :
$$L(e_j) = \sum_i L_{ij} e_i$$
Les nombres L_{ij} sont les comosantes de l'application L dans la base des $\{e_i\}$. En général, pour les représenter, on les dispose dans un tableau (appelé matrice) où la $i-$ème ligne et la $j-$ème colonne contient le nombre L_{ij}.
Démontrez que les composantes de deux vecteurs quelconque a et b tel que $b = L(a)$ sont relié par la relation (noter l'ordre des sommations)
$$b_i = \sum_j L_{ij} a_j$$
9. Démontrer alors que si la base est orthonormale,
$$L_{ij} = (e_i, L(e_j))$$

En langage claire, pour connaitre la composante L_{ij} d'une matrice, il faut trouver d'abord le vecteur qui résulte de l'application de l'operateur au $j-$ème vecteur de la base$p = L(e_j)$, et former le produit scalaire de ce vecteur avec le $i-$ème vecteur de la base.

10. Soit deux bases $\{e_i\}$ et $\{f_i\}$ et P une application linéaire tel que
$$\begin{aligned} P(e_i) &= f_i \quad i = 1, 2, ..., n \\ P^{-1}(f_i) &= e_i \end{aligned}$$
P est couramment appelé l'application de *passage*. Soit A une application linéaire quelconque dont les éléments dans la base des $\{f_i\}$ sont données par la matrice a_{ij}. Soit maintenant l'application linéaire $P^{-1}AP$. Calculer ses éléments de matrice dans la base des $\{e_i\}$.

1.2 L'espace vectoriel des fonctions.

Manipuler des vecteurs dans l'espace $\mathbb{R}^n$ c'est bien, mais nous nous intéressons à un espace beaucoup plus vaste, celui des fonctions. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies sur un intervalle donnée I. Les fonctions sont en faite des boites noire qui prennent des chiffres en entrée et produisent des chiffres en sortie. La fonction sin(.) par exemple, à une valeur $x \in I$ associe le nombre $\sin x$. On peut voir les fonctions comme des points dans un espace immensément grand où en se baladant, on rencontrerai de temps en temps des fonctions connues comme log(.), exp(.), exp(2.) et la plupart de temps des fonctions qui n'ont pas de nom[7].

Le produit scalaire. Il est évident que $\mathcal{F}$ possède une structure d'espace vectoriel. On ne sait pas encore si nous pouvons étendre la notion de base à cet espace, mais on peut parfaitement définir des produits scalaires. Le produit scalaire que l'on utilisera abondamment est le suivant :

$$(f, g) = \int_{\mathcal{I}} f(x)g(x)dx$$

On démontrera dans un exercice que ce produit scalaire a toute les bonnes propriétés. Mais on peut noter que cette définition généralise la somme $\sum x_i y_i$du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, quand $n \to \infty$ (souvenez vous de la définition de l'intégral).

Bien, nous disposons d'un produit scalaire, on peut donc définir la norme d'une fonction.

$$\|f\|^2 = \int_I [f(x)]^2 dx$$

Cette norme, appelée $\mathcal{L}_2$, est très populaire. voyons quelques exemples, pour l'intervalle $[0, 2\pi]$,

7. En faite, si on se baladait dans cet espace de façon aléatoire, on ne rencontrerai jamais des fonctions connues.

1. $\|\exp(.)\|^2 = \int_0^{2\pi} \exp^2(x)dx = (\exp 4\pi - 1)/2$.
2. $\|\sin(.)\| = \sqrt{\pi}$
3. $\|\log(.)\| =???$ à faire en exercice.
4. $\|1/(.)^n\| = \infty$ si $n > 1$.

On voit ici les premières bizarreries des ces grands espaces (de dimension infini) apparaître : un élément à priori sympathique peut avoir une norme infinie.

Le lecteur a remarqué que jusque là, nous avons utilisé une notation particulière pour distinguer une fonction (un point dans l'espace vectoriel des fonctions) de la valeur que prend cette fonction pour une entrée particulière : la première est notée $f(.)$ est la deuxième $f(x)$. Comme cette notation est quelque peu lourde et que nous espérons que le lecteur est maintenant habitué à cette distinction, nous emploierons à partir de maintenant indifféremment la notation $f(x)$ pour les deux notions. Le contexte détermine si on parle de la fonction ou de sa valeur.

Nous avons mentionné plus haut que disposer d'une norme nous permet de savoir si deux fonctions sont proches ou même identique si $\|f - g\| = 0$. Considérons alors les deux fonctions, définies sur $[0, 1]$: $f(x) = 1$ et $g(x) = 1$ si $x \neq 0$ et $g(x) = 0$ si $x = 0$. Au sens de notre norme $\mathcal{L}_2$, ces deux fonctions sont identiques [8] ! Grossièrement parlant, notre norme est une lunette pas trop précise et ne distingue pas les différences subtiles entre deux fonctions. Elle ne va retenir que les traits les plus importants [9]. Ainsi, quand $n \to \infty$, la suite des fonctions $f_n(x) = x^n$converge vers $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, 1]$ au sens $\mathcal{L}_2$, mais ne converge pas au sens des convergences uniformes.

Notons enfin que si nous manipulons l'ensemble des fonctions qui associent à une valeur réelle un nombre *complexe*, *i.e.* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, nous devons légèrement modifier la définition du produit scalaire :

$$(f, g) = \int_I f(x)g(x)^* dx$$

où le symbole $*$ désigne le complexe conjugué.

L'orthogonalité. La notion d'orthogonalité se généralise immédiatement aux fonctions : f et g ($\neq \mathbf{0}$) sont orthogonales si $(f, g) = 0$. Ainsi, sur l'intervalle $[-1, 1]$, les fonctions 1 et x sont orthogonales. De même pour les fonction $\exp(-x/2)$ et $\exp(-x/2)(1 - x)$ sur l'intervalle $[0, \infty]$.

Nous avons vu plus haut que la notion d'orthogonalité nous donne un sérieux coup de main pour trouver une base. En particulier, dans un espace de dimension n, il nous suffit de trouver n vecteurs orthogonaux pour avoir une base. Peut on généraliser ce résultat à des espaces de dimension infinie ? la réponse est oui si on prend des précautions. Les fonctions de normes infinies nous posent de sérieux problèmes. Nous allons donc restreindre notre espace de fonctions en nous contentant des fonctions de carré sommable,

8. C'est même pire : Si la fonction g est définie par $g(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $g(x) = 1$ sinon, au sens de notre norme, elle est identique à la fonction f. Bien sûr, on aurait besoin de redéfinir ce que l'on entend par une intégrale.

9. Il existe bien sûr des normes aux pouvoirs de résolutions beaucoup plus grande, comme celle utilisée pour la convergence uniforme des suites de fonctions.

c'est à dire des fonction f tel que $\int_I |f(x)|^2 dx < \infty$. Nous avons alors le théorème fondamental suivant :

> Dans l'espace des fonctions de carré sommable, on peut trouver des ensembles *infini dénombrable* de fonctions orthogonaux qui chacun constitue une base.

Le lecteur peut méditer sur ce théorème : pour l'énoncer (sans le démontrer) nous avons pris de nombreux raccourcies sans même avoir précisé certains termes, encore moins leur donner un peu de rigueur et de décence. Nous allons dans la suite clarifier un peu mieux les choses, sans les démontrer. Mais avant cela, voyons le côté étrange de ce théorème.

Comme nous l'avons indiqué, l'infini dénombrable, celui des nombres entiers, est le plus petit des infinis. Il a cette particularité que pour un nombre donné, on peut indiquer celui qui est juste avant et celui qui est juste après. L'infini des nombres rationnels n'est pas vraiment plus grand, ni celui des nombres algébriques. Par contre, l'infini des nombre réels est vraiment plus grand. On peut dire grossièrement [10] que $\mathbb{R} = 2^{\mathbb{N}}$(bien sûr, on parle en faite du cardinal, de la taille, de ces ensembles) : pour représenter *un* nombre réel, nous avons absolument besoin de $\mathbb{N}$ nombre entier. L'ensemble des fonctions est beaucoup, beaucoup plus vaste. Imaginez que pour représenter *une seule* fonction, nous avons besoin de $\mathbb{R}$ nombre réel. Le théorème ci-dessus nous dit que si la fonction est de carré sommable, nous n'avons alors besoin pour la représenter que de $\mathbb{N}$ nombre réel ! Une exigence a priori anodine, que les fonctions soient de carré sommable, réduit sérieusement la taille de l'ensemble des fonctions.

Après ces digressions philosophiques, un peu de concret. D'abord, qu'est ce que ça veut dire une base dans ces espaces infinis ? intuitivement, ça doit être la même chose que les espaces de dimensions fini : un ensemble d'objet élémentaire qui nous permet de décrire tous les autres. Supposons que, dans l'espace des fonctions, $E = \{e_1, e_2, ...\}$ constitue une base orthonormée. Dans ce cas, une fonction quelconque f doit pouvoir s'écrire, de façon unique,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e_n(x)$$

où les f_n sont des *scalaires* qu'on appelle les composantes de f sur la base $\{e_n\}$. Elle sont données, comme pour des espaces de dimensions finis, par la *projection* de f sur les vecteurs de base en utilisant le produit scalaire :

$$f_n = \int_I f(x) e_n(x) dx$$

Remarquez que f_n est bien un nombre, un scalaire. On peut définir une suite de fonctions $\phi_N(x) = \sum_{i=1}^{N} f_n\, e_n(x)$. Si l'ensemble E est bien une base, alors $\|f - \phi_N\| \to 0$ quand $N \to \infty$. Cela veut dire qu'on peut approximer une fonction par une somme finie de fonctions de base, et on peut rendre cette approximation aussi bonne qu'on le souhaite

10. le cardinal de $\mathbb{N}$ est noté $\aleph_0$ (aleph zéro), celui de $\mathbb{R}$ $\aleph_1$ si on accepte l'axiome de choix. En pensant aux nombres réels entre 0 et 1 comme une succession (infinie) de bits 0 et 1 (comme en informatique), la relation $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ paraît assez raisonnable. Nous devons tous ces résultats sur les infinis aux travaux de Georg Kantor, à la fin du dix-neuvième siècle.

en prenant suffisamment de composante. Le lecteur est déjà partiellement habitué à cette idée : le développement de Taylor approxime une fonction par la combinaison des fonctions x^n. L'espace des fonctions qui peuvent être couvert par un développement de Taylor est cependant beaucoup plus petit que $\mathcal{L}_2$. Les mathématiciens ont été amené à trouver donc d'autres bases. Chaque base est bien adapté aux traitements d'un certain nombres de problèmes, essentiellement la résolution d'une certaine classe d'équations différentielles. La base la plus populaire, est de loin, est celle proposée par monsieur Fourier, préfet de l'Isère en son temps, au tout début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Ce sera l'objet du prochain chapitre.

Exercices.

1. Donner une définition précise de la convergence d'une suite au sens de la norme $\mathcal{L}_2$ dans l'espace des fonctions de carré sommable.
2. montrer que la fonction $f(x) = x^n$ définie sur $[0,1]$ converge vers la fonction $g(x) = 0$ au sens $\mathcal{L}_2$.
3. Démontrer que la convergence uniforme implique la convergence au sens $\mathcal{L}_2$. L'exemple précédent montre bien sûr que le contraire n'est pas vrai.
4. En algèbre linéaire, les formes bilinéaires généralisent le concept du produit scalaire. On peut suivre le même chemin et définir le produit scalaire entre deux fonctions par
$$(f,g) = \int_I w(x)f(x)g(x)dx$$
où la fonction $w(x)$est appelé le poids. Démontrer que cette définition possède les propriétés d'un produit scalaire. Que doit on imposer à la fonction poids ?
5. On appel polynômes orthogonaux des polynômes $P_n(x)$ de degrés n, orthogonaux les uns aux autres au sens du produit scalaire défini plus haut. Trouver les trois premiers polynômes associés au poids $w(x) = 1$ et à l'intervalle $[-1,1]$. On appelle ces polynômes les polynômes de Legendre.
6. Démontrer que les polynômes de Legendre que vous avez trouvé obéissent à l'équation différentielle
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$
En réalité, c'est souvent pour cela que l'on cherche les polynômes orthogonaux : ils sont solution d'équations différentielles intéressante pour la physique.
7. Même question que 5 pour le poids $w(x) = e^{-x}$et l'intervalle $[0,\infty[$. Ces polynômes sont associés à la solution de l'équation de Schroedinger pour l'atome d'hydrogène.
8. L'opération $D = d/dx$ est une opération linéaire dans l'espace des fonctions infiniment dérivable ($\mathcal{C}^\infty$) : (i) elle prend une fonction en entrée et donne une fonction en sortie ; (ii) elle fait cela de façon linéaire, *i.e.* $D(\lambda f + \mu g) = \lambda Df + \mu Dg$, où λ, μ sont des scalaires et f, g des fonctions. Supposons que des fonctions orthonormées $f_n(x)$ constituant une base obéissent à la relation $df_n(x)/dx = f_n(x) + a_n f_{n+1}(x)$. Pouvez-vous donner la représentation matricielle de D dans la base des f_n ?

1.3 Quelques digressions historiques.

Le concept d'espace vectoriel des fonctions a été proposé par Hilbert à la fin du dix-neuvième et début du vingtième siècle et a unifié de nombreux champs de recherches en mathématique. La résolution des équations intégrales pouvait par exemple être ramené à la recherche des valeurs propres de certaines matrices. La résolution d'un système d'équations différentielles de premier ordre pouvait être donné directement comme l'exponentiel d'une matrice, ... Nous n'épuiserons pas par quelques exemples l'approche profondément novatrices d'Hilbert. Ce champ de recherche était cependant méconnu des physiciens. Au début des années 1920, Heisenberg et ses collègues ont inventé une mécanique matricielle (qu' Einstein qualifia de cabalistique dans une lettre à Planck) pour expliquer les phénomènes observés à la petite échelle des atomes et des électrons. Quelques années plus tard, Schrödinger a proposé sa célèbre équation d'onde, qui elle aussi expliquait assez bien les phénomènes observés. C'est Von Neumann qui a démontré à la fin des années 1920 que ces deux approches étaient fondamentalement les mêmes (voir exercice 8 plus haut) : l'équation de Schrödinger utilise un opérateur dans l'espace des fonctions de carré sommable (qui transforme une fonction en une autre fonction, comme une matrice qui transforme un vecteur dans un autre vecteur), donc associé à une matrice infinie. Depuis, les grands succès de la mécanique quantique ont encouragé les physiciens à assimiler ces concepts dès leur plus tendre age, ce qui les aide à traiter de nombreux champs de recherches autres que la mécanique quantique par les même techniques.