

Complétude des bases dans l'espace d'Hilbert.

31 janvier 2008

Nous avons utilisé massivement la décomposition des fonctions sur une base dans l'espace d'Hilbert. Nous avons par exemple admis qu'une fonction de carré sommable sur un intervalle fini peut se décomposer sur la base de Fourier, ou celle des polynômes de Legendre. Pour les fonctions à deux variables, nous avons utilisé les sphériques harmoniques. Nous n'avons cependant jamais démontré que ces bases étaient *complètes*. La non complétude revient par exemple à utiliser les deux seuls vecteurs $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$ pour décomposer tous les vecteurs de l'espace à trois dimension.

La preuve de la complétude de ces bases est longue et un peu technique. Elle repose sur le théorème d'approximation de Weierstrass¹. Nous allons donner d'abord un aperçu de cette construction, et reviendrons ensuite pour démontrer chaque étape précisément. Il existe de nombreuses versions de la démonstration, nous suivons ici la démarche de Fuller et Byron.

Etape 1 : théorème de Weierstrass. Le théorème W. nous affirme qu'étant donnée une fonction $f(x)$ continue sur $[a, b]$, on peut trouver une suite de polynômes P_n de degrés $2n$ tels que les P_n convergent *uniformément* vers elle. Plus exactement,

$$\forall \epsilon > 0, x \in [a, b], \exists N \text{ tel que } (n > N) \Rightarrow |P_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

et le théorème donne une recette pour construire explicitement les $P_n(x)$. Nous donnerons plus tard la recette, mais remarquez pour l'instant la puissance de ce théorème : nous n'avons rien exigé de plus de la fonction que la continuité ; aucune information sur ses dérivées n'est nécessaire.

Nous venons de dire qu'étant donné un degré de précision ϵ exigé, nous pouvons trouver un n et des coefficients a_{nm} tel que

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{2n} a_{nm} x^m$$

soit une approximation de la fonction $f(x)$ dans la limite ϵ exigée, quelque soit x dans l'intervalle considéré.

¹1885. Pour les germanophone, le texte original se trouve sur le web.

Etape 2 : polynomes orthogonaux. Nous pouvons exprimer x^m comme une somme de polynomes orthogonaux $Q_i(x)$. Cela s'appelle orthogonalisation de Gram-Schmidt. On commence par un polynome de degrés 0 sur $[a, b]$, $Q_0(x) = a_0$. Nous cherchons ensuite $Q_1(x)$, polynome de degrés 1, tel que $(Q_0, Q_1) = 0$ et cela nous détermine (à un facteur près) Q_1 . Nous cherchons ensuite $Q_2(x)$ tel que $(Q_2, Q_1) = (Q_2, Q_0) = 0$ et ainsi de suite. Il est alors trivial de démontrer que

$$x^m = \sum_{i=0}^m c_{mi} Q_i(x)$$

où les c_{mi} sont unique et donnés par (x^m, Q_i) . Notez que les polynomes Q_i sont donnés une fois pour toute et ne dépendent que de l'intervalle $[a, b]$. Nous donnerons plus tard quelques exemples, comme les polynomes de Legendre associés à l'intervalle $[-1, 1]$.

$P_n(x)$ étant juste un polynome en x , on peut répéter ce qu'on a fait pour x^m et écrire

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} b_{ni} Q_i(x)$$

Etape 3 : complétude. Il reste maintenant à démontrer que les Q_i sont complet pour *n'importe* quelle fonction continue, ou autrement dit, $\{Q_i(x) | i = 0, 1, 2, \dots\}$ constitue une base pour les fonctions continues sur $[a, b]$. Pour démontrer cela, il nous suffit de démontrer que *si* il existe une fonction $f(x)$ orthogonale à tous les $Q_i(x)$, alors $\|f\| = 0$.

Pour démontrer cela, il nous suffit de démontrer que l'on peut rendre $\|f\| < \epsilon$, quelque soit ϵ . Nous savons que pour ϵ donné, nous pouvons trouver n et le polynome $P_n(x)$ tel que $|f(x) - P_n(x)| < \epsilon$. Nous pouvons donc trouver un (autre) n tel que $\|f(x) - P_n(x)\| < \epsilon$.

Or, si $(f, Q_i) = 0$ pour tout i , alors $(f, P_n) = 0$ également pour tout n , les P_n étant simplement des combinaisons linéaires des Q_i . Nous avons donc

$$\begin{aligned} \|f(x) - P_n(x)\|^2 &= (f(x) - P_n(x), f(x) - P_n(x)) \\ &= \|f(x)\|^2 + \|P_n(x)\|^2 \\ &< \epsilon^2 \end{aligned}$$

La norme étant une quantité positive, nous avons obligatoirement $\|f(x)\| < \epsilon$.

Remarquez le résultat que nous venons d'obtenir : si nous construisons sur l'intervalle $[a, b]$ un ensemble $Q_n(x)$ de polynomes orthogonaux pour $n \in \mathbb{N}$, alors $\{Q_n(x)\}$ est une base pour les fonctions continues sur $[a, b]$.

Etape 4 : toilettage. Nous avons démontré que $\{Q_n\}$ est une base pour les fonctions continues, mais l'espace d'Hilbert est plus vaste que ça. Nous gagnons la généralisation à l'espace d'Hilbert en utilisant le théorème suivant : Pour $f \in \mathcal{L}_{[a,b]}$, quelque soit $\epsilon > 0$, nous pouvons trouver une fonction *continue* $g(x)$ telle que $\|f(x) - g(x)\| < \epsilon$. En langage humain, n'importe quelle fonction de carré sommable peut-être approximé par une fonction continue.

Voyons voir maintenant quelques exemples.

Exemple 1 : les polynomes de Legendre. Soit l'intervalle $[-1, 1]$. Nous allons trouver les polynomes orthogonaux $P_n(x)$ sur cet intervalle ; pour fixer le facteur arbitraire, nous choisissons la condition $P_0(1) = 1$. Souvent, la condition utilisée est $\|P_n\| = 1$. En écrivant $(P_1, P_0) = 0$, nous trouvons $P_1(x) = x$ et en continuant de la sorte, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$, ... On peut démontrer (voir le cours) que nous avons, de façon générale,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

Exemple 2 : les séries de Fourier. Considérons maintenant une fonction de deux variable $f(x, y)$ sur le carré $[-1, 1]^2$. On peut trouver une base polynomiale où, en réarrangeant les termes, on peut écrire

$$f(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$$

Considérons maintenant, pour $\theta \in [0, 2\pi]$, la fonction

$$g(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta)$$

En utilisant la décomposition donné, nous trouverons des terms du genre $\cos^i \theta \sin^j \theta$. Un tel produit peut toujours se réarranger comme une somme de $\cos k\theta$ et de $\sin l\theta$; en regroupant tous les termes, nous avons

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)$$

Nous venons de démontrer ici que n'importe quelle fonction de l'espace de Hilbert sur $[0, 2\pi]$ peut s'écrire comme une somme des termes de Fourier. Comme ces termes sont de plus orthogonales les uns aux autres, les termes de Fourier constitue bien une base.

Exemple 3 : Les sphériques harmoniques. La construction des sphériques harmoniques est similaire à ce que nous venons de faire. Considérons une fonction de trois variable, $f(x, y, z)$ décomposé sur une base polynomiale orthogonale. Soit maintenant la fonction

$$g(\theta, \phi) = f(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

En combinant soigneusement les divers termes, on peut démontrer que le polynôme résultant peut se mettre comme une somme de terme du genre

$$e^{im\phi} \sin^m \theta f_{lm}(\cos \theta)$$

où $f_{lm}(x)$ est un polynome de degrés $l - m$. Ces fonctions sont appelées les sphériques harmoniques quand on les orthogonaliser correctement.