Examen de Mathématiques,

L3 Physique-Chimie

Octobre 2006

1 Oscillation de l'extrémité d'une corde.

Mise en place du problème. Soit une corde dont la hauteur à l'abscisse x au temps t est donné par $u(x,t)$, obéissant à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

La corde est fixée à son extrémité $x = 0$. A l'extrémité $x = L$ par contre, la corde est soumise à une oscillation : $u(L,t) = f(t)$ où $f(t)$ est une fonction connue, imposée par l'expérimentateur, et $f(0) = 0$. A l'instant $t = 0$, nous soupesons la corde au repos : $u(x,0) = 0$, $\partial_t u(x,t)|_{t=0} = 0$. Nous souhaitons savoir comment la mise en oscillation d'une extrémité se propage dans la corde (voir fig.1)

1. Question préliminaire. Donner la décomposition de la fonction $h(x) = x/L$ en série de sinus sur l'intervalle $[0,L]$. Pour plus de simplicité, désignez par la suite les coefficients de la décomposition par β_n. Comment ces coefficients sont modifiés si on multiplie $h(x)$ par (i) une constante A ; (ii) une fonction dépendante d'un autre paramètre $f(t)$?

2. Expliquez pourquoi tel quel, nous ne pouvons pas chercher la solution $u(x,t)$ sous forme de série de sinus. Nous devons régulariser les conditions aux limites. Considérons la fonction

$$w(x,t) = u(x,t) - x f(t)/L$$

(i) A quelle équation obéit la fonction $w(x,t)$? (ii) Quelle sont les conditions au limites et initiales pour $w(x,t)$?

3. En décomposant $w(x,t) = \sum_n b_n(t) \sin(n\pi x/L)$, démontrer que les harmoniques obéissent à l'équation

$$b_n''(t) + n^2\omega_0^2 b_n(t) = -\beta_n f''(t) \tag{2}$$

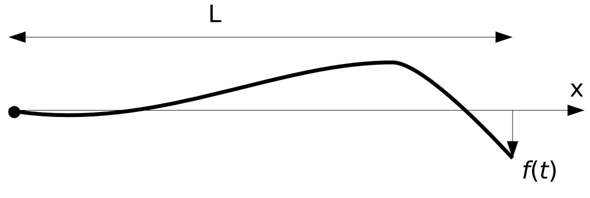

FIG. 1: Une corde élastique soumise à l'oscillation d'une de ses extrémités.

où nous avons posé $\omega_0 = \pi c/L$.

4. Dorénavant, nous supposerons que $f(t) = \ell \sin(\omega_1 t)$. Vérifier qu'une *solution particulière* de l'équation (2) est

$$b_n(t) = K_n \sin(\omega_1 t)$$

où vous déterminerez l'amplitude K_n. En ajoutant cette solution à la solution de l'équation homogène, donner la solution générale de l'équation (2). Déterminez les constantes restantes à l'aide des conditions initiales de la corde. Donnez alors l'expression de $w(x,t)$ par sa série de sinus, où toutes les quantités sur les harmoniques sont connues.

5. Discutez pour quels valeurs de la fréquence d'excitation nous obtenons la résonance de la corde.

6. Indiquez rapidement comment le résultat aurait été modifié si la corde était soumis localement à une force proportionnelle à sa hauteur, c'est dire obéissait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -ku \tag{3}$$

Il suffit d'indiquer comment chaque étape des questions précédentes est modifié.

2 Propagation du son dans un cristal (les phonons).

Mise en place du problème. Nous allons considérer un cristal uni-dimensionnel de maille élémentaire a. La position d'équilibre de l'atome n est $x_n = na$. Chaque atome n'interagit qu'avec avec ses deux plus proches voisins. Nous voulons savoir comment une perturbation des atomes par rapport à leur positions d'équilibre se propage dans le cristal. Soit u_n l'écart de l'atome n par rapport à sa position d'équilibre (Fig. 2). La force $f_{n+1\to n}$ exercée par l'atome $n+1$ sur son voisin n est une fonction de la distance entre les deux : $f_{n+1\to n} = C(u_{n+1} - u_n)$ où C est un coefficient qui dépend de la nature de la liaison chimique (grand pour les cristaux ioniques ou covalents plus petit pour les cristaux moléculaires). Soit m la masse d'un atome ; son équation de mouvement ($\gamma = F/m$) s'écrit, en considérant les forces exercées par ses deux voisins,

$$\frac{d^2u_n}{dt^2} = (C/m)\,(-2u_n + u_{n+1} + u_{n-1}) \qquad (4)$$

Dorénavant, nous poserons $\omega_0^2 = C/m$.

Résolution. Nous considérerons les quantités $u_n(t)$ comme les coefficients de Fourier d'une fonction caractéristique $\phi(q,t)$ où la variable q appartient à l'intervalle $[-\pi/a, \pi/a]$ (la longueur de l'intervalle est donc $L = 2\pi/a$). Le paramètre q est souvent appelé "nombre d'onde". ϕ s'écrit donc

$$\phi(q,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(t)\exp(iaqn) \qquad (5)$$

1. En multipliant l'équation (4) pour l'atome n par $\exp(iaqn)$ et en sommant sur toutes les équations, démontrer que la fonction ϕ obéit à l'équation

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + 2\omega_0^2(1-\cos(aq))\,\phi = 0 \qquad (6)$$

[Help : Utilisez et justifiez $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_{n\pm1}\exp(iaqn) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \exp(iaq(n\mp1))$].

2. Vérifiez que la solution de cette équation différentielle linéaire homogène de seconde ordre en t est donnée par

$$\phi(q,t) = A(q)\exp(i\omega_q t) + B(q)\exp(-i\omega_q t)$$

où $\omega_q = 2\omega_0\sin(aq/2)$. [Help : arranger d'abord l'équation (6) en exprimant $\cos(2\theta)$ en fonction de $\sin\theta$]. $A(q)$ et $B(q)$ sont des fonctions du paramètre q, mais pas du paramètre t qui peuvent être déterminées à l'aide des conditions initiales, mais nous n'avons pas besoin de les expliciter ici.

3. (i) Donnez enfin la forme des $u_n(t)$. Comme vous pouvez le constater, les u_n peuvent être considérés comme des superpositions d'ondes planes $\exp[i(\omega_q t \pm qna)]$. (ii) La vitesse du propagation d'onde est définie par $v_q = d\omega_q/dq$. Donnez l'expression de v_q et tracez la en fonction de q. Que vaut cette vitesse pour $q \to 0$ (grande longueur d'onde) et $q \approx \pm\pi/a$?

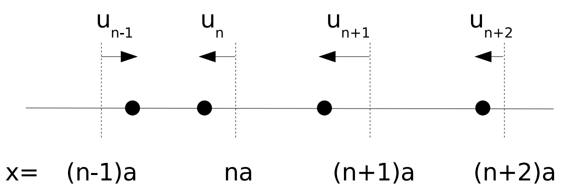

FIG. 2: Une portion du cristal montrant 4 atomes

4. Généralisation. Pouvez-vous indiquer, en suivant rapidement le même chemin que pour les questions précédentes, ce qui changerait si un atome interagissait avec ses 4 plus proches voisins ?

$$\begin{aligned}\frac{d^2u_n}{dt^2} &= \omega_0^2\,(-2u_n + u_{n+1} + u_{n-1}) \\ &+ \alpha\omega_0^2\,(-2u_n + u_{n+2} + u_{n-2})\end{aligned}$$

3 Opérateurs Hermitiens.

Dans cette question, nous ne considérons que l'espace $\mathcal{S}$ des fonctions $u(x)$ réelles, infiniment dérivables et qui tendent vers 0 pour les grands x : $u(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$. On appelle un opérateur une fonction de fonction, une machine "qui prend une fonction en entrée et produit une fonction en sortie". Par exemple, l'opérateur $D = d/dx$ appliquée à une fonction produit sa dérivée : $Du = u'$.

On appelle opérateur hérmitien un opérateur H tel que

$$(Hu_1, u_2) = (u_1, Hu_2) \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{S}$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire entre fonction.

1. Démontrer que l'opérateur d/dx n'est pas hermitien, mais que l'opérateur d^2/dx^2 est hermitien [Help : vous pouvez avoir besoin d'une ou deux intégrations par partie].

2. On appelle fonction propre d'un opérateur H une fonction $u(x)$ telle que

$$Hu = \lambda u$$

où λ est une constante appelée valeur propre. Par exemple, la fonction $\sin(kx)$ est une fonction propre de l'opérateur d^2/dx^2 associée à la valeur propre $-k^2$.

Démontrez que si u_1 et u_2 sont deux fonctions propres de l'opérateur hermitien H associée aux deux valeurs propres λ_1 et λ_2 différentes, ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), alors u_1 et u_2 sont orthogonales $(u_1, u_2) = 0$. [Help : former la différence $(Hu_1, u_2) - (u_1, Hu_2)$ et utiliser d'une part le fait que H est hermitien, d'autre part que u_1, u_2 sont fonctions propres de H.

3. Considérons maintenant l'espace $\mathcal{S}'$ des fonctions à valeurs *complexes*. Démontrez que les valeurs propres d'un opérateur hermitien sont forcément réelles. [Help : considérez, pour la fonction propre $u(x)$ de l'opérateur hermitien H, les deux quantités (Hu, u) et (u, Hu) et utilisez la propriété de linéarité du produit scalaire défini sur le corps des complexes.