Examen de Mathématiques, corrigé

L3 Physique-Chimie

Octobre 2006

1 Oscillation d'une extrémité d'une corde.

1. Question préliminaire. En faisant une integration par partie, nous obtenons

$$\begin{aligned} x/L &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \beta_n &= -\frac{2(-1)^n}{\pi n} \end{aligned}$$

Bien sûr, si on multiplie $h(x)$ par une constante (vis à vis de la variable x), β_n sera multiplié par la même constante.

1.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{x}{L} f''(t)$$

$w(0,t) = u(0,t)$; $w(L,t) = u(L,t) - (L/L)f(t) = 0$. Parfait pour une décomposition en série de sinus. Par ailleurs, $w(x,0) = u(x,0) - (x/L)f(0) = 0$ et $\partial_t w(x,0) = \partial_t u(x,0) - (x/L)f'(0) = -(x/L)f'(0)$

3. En prenant pour $f(t) = \ell \sin(\omega_1 t)$, les équations des harmoniques s'écrivent

$$b_n''(t) + n^2\omega_0^2 b_n(t) = \beta_n \ell \omega_1^2 \sin(\omega_1 t)$$

Prenons $g_n(t) = K_n \sin(\omega_1 t)$ comme solution particulière. En la reportant dans l'équation ci-dessus, nous trouvons

$$-K_n(\omega_1^2 - n^2\omega_0^2)\sin(\omega_1 t) = \beta_n \ell \omega_1^2 \sin(\omega_1 t)$$

donc, $g_n(t)$ est une solution particulière si

$$K_n = -\ell\beta_n \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - n^2\omega_0^2} \tag{1}$$

La solution générale est donc

$$b_n(t) = A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t) + K_n \sin(\omega_1 t)$$

Les conditions initiales se traduisent sur les harmoniques par $b_n(0) = 0$, $b_n'(0) = -\beta_n f'(0) = -\ell\omega_1\beta_n$, c'est à dire

$$\begin{aligned} A_n &= 0 \\ n\omega_0 B_n + \omega_1 K_n &= -\ell\omega_1\beta_n \end{aligned}$$

Et donc, en utilisant l'expression (1), on trouve

$$B_n = \ell\beta_n \frac{n\omega_0\omega_1}{\omega_1^2 - n^2\omega_0^2}$$

ou encore $B_n/K_n = -n\omega_0/\omega_1$

La solution b_n est donc donnée par

$$b_n(t) = \frac{K_n}{\omega_1}\left(-n\omega_0 \sin(n\omega_0 t) + \omega_1 \sin(\omega_1 t)\right)$$

4. Il y a résonnance, c'est à dire $K_n \to \infty$ quand la fréquence ω_1 s'approche d'un multiple de la fréquence propre de la corde ω_0. Mais comme $K_n \sim \beta_n$ et que $\beta_n \sim 1/n$, la résonnance est moins efficace pour les multiples élevés. Bien sûr, pour voir cela exactement, nous aurions dû inclure un peu de frottement dans les équations pour éviter les divergences.

5. La démarche générale est presque identique. Nous aurions un terme supplémentaire de source en $k(x/L)f(t)$ et l'équation sur les harmoniques s'écrirait

$$b_n''(t) + (n^2\omega_0^2 + k)b_n(t) = -(x/L)[f''(t) + kf(t)]$$

Cela shift les fréquences de résonnace d'une quantité constante k :

$$\omega_n^{resonance} = \sqrt{n^2\omega_0^2 + k}$$

2 Propagation du son dans un cristal (les phonons).

En multipliant l'équation (4) par $\exp(iaqn)$ et sommant sur tous les n, on trouve pour les termes de gauche de l'équation, en intervertissant sommation sur n et dérivation sur t

$$\begin{aligned} \sum_n (d^2u_n/dt^2)\exp(iaqn) &= \frac{d^2}{dt^2}\sum_n \exp(iaqn) \\ &= \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \end{aligned}$$

L'opération d'intervertissement est permis puisque nous supposons la fonctions ϕ comme continuement dérivable et de dérivée bornée. Si après les calculs, nous nous rendons compte que cela n'étais pas le cas, notre calcul serait invalide.

Pour les termes de droite de l'équation, il suffit d'utiliser le help mentionné, pour trouver

$$\begin{aligned}\omega_0^2(-2+\exp(-iaq)+\exp(iaq))\phi &= -2\omega_0^2(1-\cos aq)\phi \\ &= -4\omega_0^2\sin^2(aq/2)\phi\end{aligned}$$

L'équation se met donc sous la forme

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+4\omega_0^2\sin^2(aq/2)\phi=0$$

ou encore

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\omega_q^2\phi=0$$

Ceci est une équation différentielle ordinaire en t, linéaire et de second ordre. Sa solution est trivial :

$$\phi(q,t)=A(q)\exp(i\omega_q t)+B(q)\exp(-i\omega_q t)$$

où $A(q)$ et $B(q)$ ne dépendent pas de temps.

Les déplacement $u_n(t)$ sont donné par

$$\begin{aligned}u_n(t) & \quad \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}\phi(q,t)\exp(-ianq)dq \\ &= \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}A(q)\exp\left(-i(anq-\omega_q t)\right)dq \\ &+ \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}B(q)\exp\left(-i(anq+\omega_q t)\right)dq\end{aligned}$$

Nous voyons donc que le déplacement u_n est une superposition d'ondes progressives $\exp\left(-i(qx\pm w_q t)\right)$où $x=na$ est la position de l'atome n. Une onde de nombre d'onde q et de pulsation ω_q possède la vitesse de groupe

$$\begin{aligned}v_q &= \frac{d\omega_q}{dq} \\ &= a\omega_0\cos(aq/2)\end{aligned}$$

Pour les grandes longeur d'onde ($q\ll\pi/a$ ou dit autrement $\lambda=2\pi/q\gg a$), $v_q=a\omega_0$ indépendant de q. C'est la vitesse du son dans le cristal. Par contre, quand la longueur d'onde devient de l'ordre du paramètre de maille $q\approx\pi/a$, la vitesse du son devient proche du zéro. Ceci est une des difficulté de la microscopie par ultra-son.

Si maintenant l'interaction est avec les 4 plus proches voisins, la seule étape qui est modifiée est celle de la multiplication par $\exp(iaqn)$ qui donnera un terme additionnel dans ω_q

$$\left(\frac{\omega_q}{2\omega_0}\right)^2=\sin^2(aq/2)+\alpha\sin^2(aq)$$

On peut étendre le calcul aux n plus proches voisins et remarquer que

$$\left(\frac{\omega_q}{2\omega_0}\right)^2=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\cos(jaq).$$

Nous voyons alors que mesurer la courbe ω_q en fonction de q revient à mesurer l'intéraction d'un atome avec ses voisins, via une décomposition en série de fourier. Ceci se pratique tous les jours dans nos laboratoires. Nous laissons la suite aux personnes désirant suivre une formation en physique du solide.

3 Operateur Hermitien.

1. Nous voyons que pour d/dx

$$\begin{aligned}((d/dx)u_1,u_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du_1(x)}{dx}u_2(x)dx \\ &= [u_1u_2]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}u_1(x)\frac{du_2(x)}{dx}dx \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty}u_1(x)\frac{du_2(x)}{dx}dx \\ & \quad -(u_1,(d/dx)u_2)\end{aligned}$$

Pour d^2/dx^2, les deux intégrations par partie restorent le signe $+$.

2. Considérons $I=(Hu_1,u_2)-(u_1,Hu_2)$. D'abord, puisque H est hermitien, par définition $I=0$. Ensuite, puisque $Hu_1=\lambda_1u_1$ et $Hu_2=\lambda_2u_2$, en utilisant la linéarité du produit scaliaire, on trouve

$$I=(\lambda_1-\lambda_2)(u_1,u_2).$$

Comme $\lambda_1\neq\lambda_2$, $(u_1,u_2)=0$.

3. Soit $Hu=\lambda u$. Alors $(Hu,u)=(\lambda u,u)=\lambda(u,u)$ et $(u,Hu)=(u,\lambda u)=\lambda^*(u,u)$. Comme H est hermitien, ces deux quantités sont égales, donc $\lambda=\lambda^*$.