Examen de Mathématiques,

L3 Physique-Chimie

Décembre 2006

Résolution de l'équation d'onde

Introduction. Nous allons procéder à la résolution de l'équation d'onde dans un milieu infini ($x \in [-\infty, \infty]$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$
$$u(x,0) = f(x) \quad ; \quad \partial_t u(x,0) = g(x) \quad (2)$$

en notant que formellement,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

L'algèbre des opérateurs différentiels n'est pas si différente de l'algèbre habituelle, et nous pourrions donc en principe, ramener la résolution d'une EDP de second degrés à celle d'EDPs de premier degrés.

1. Nous voulons résoudre

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (3)$$
$$\phi(x,0) = F(x)$$

En prenant d'abord une transformée de Laplace par rapport à t ($\phi(x,t) \rightarrow \hat{\phi}(x,s)$) et ensuite une transformée de Fourier par rapport à x ($\hat{\phi}(x,s) \rightarrow \tilde{\hat{\phi}}(q,s)$), démontrer que

$$\tilde{\hat{\phi}}(q,s) = \frac{\tilde{F}(q)}{s - icq} \quad (4)$$

où $\tilde{F}(q) = \mathrm{TF}[F(x)]$.

2. Qu'elle est l'originale (la Transformée de Laplace inverse) de la fonction $b/(s-a)$? a et b sont deux paramètres ne dépendant pas de s. Utilisez ce résultat dans l'expression (4) pour trouver l'originale $\tilde{\phi}(q,t)$.

3. En utilisant la règle de translation pour les transformées de Fourier, démontrer finalement que

$$\phi(x,t) = F(x+ct)$$

4. Utilisez les résultats précèdent pour donner immédiatement la solution de l'équation

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + c\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0 \quad (5)$$
$$\psi(x,0) = G(x)$$

5. Revenons maintenant à notre équation d'onde (1,2) et notre fonction inconnue $u(x,t)$ qui obéit à cette équation. Vérifiez que si l'on pose

$$\phi(x,t) = \partial u/\partial t + c\partial u/\partial x$$

alors $\phi(x,t)$ obéit à l'équation (3) avec la condition initiale

$$\phi(x,0) = g(x) + cf'(x)$$

Donnez alors la solution complète $\phi(x,t)$ en utilisant les résultats des questions précédentes. En suivant la même démarche, donner également la solution complète $\psi(x,t)$, où $\psi(x,t) = \partial u/\partial t - c\partial u/\partial x$.

6. En combinant les résultats de la question précédente, obtenez $\partial_t u(x,t)$ en fonction de $\phi(x,t)$ et $\psi(x,t)$ et démontrez enfin que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\{g(x+ct) + g(x-ct)\} + \frac{c}{2}\{f'(x+ct) - f'(x-ct)\}$$

Finalement, en intégrant cette équation par rapport au temps (c'est à dire en notant $u(x,t) = u(x,0) + \int_0^t \partial_\tau u(x,\tau)d\tau$), démontrez que la solution complète de l'équation d'onde s'écrit :

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy + \frac{1}{2}\{f(x+ct) + f(x-ct)\}$$

Les Fonctions trigonométrique-intégrales.

Nous sommes intéressés par l'étude de la fonctions "sinus intégral"

$$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau$$

C'est une fonctions que l'on rencontre très fréquemment dans la théorie du rayonnement. Il est très facile d'obtenir une approximation de cette fonction pour les petits t en faisant un développement de Taylor ; il est moins aisé d'obtenir une approximation pour les t large. Nous allons le faire en utilisant les transformés de Laplace.

1. Vous savez que, pour les transformés de Laplace, multiplier une fonction par t revient à dériver son image par rapport à s (et la changer de signe). Démontrer une variation de cette règle : diviser l'original par t revient à intégrer l'image. Plus exactement, si la TL d'une fonction $f(t)$ est $\tilde{f}(s)$, alors

$$\int_s^\infty \tilde{f}(\sigma)d\sigma = \text{TL}[\frac{f(t)}{t}]$$

On supposera que $f(0)=0$. [**Help** : écrivez la définition de $\tilde{f}(s)$ et intégrez cette dernière sur $[s,\infty]$; pour calculer cette intégrale, il vous suffit d'interchanger l'ordre d'intégration].

2. En utilisant le dictionnaire et les règles de manipulation des TL et la règle que vous avez obtenu ci-dessus, démontrez que

$$\tilde{Si}(s) = \frac{1}{s}\left[\pi/2 - \text{Arctg}(s)\right]$$

3. En utilisant les résultats précédents, trouver le développement asymptotique de $Si(t)$ pour t large.

Le principe d'incertitude.

En mécanique quantique, le principe d'incertitude affirme que l'on ne peut pas connaître avec précision la position et la vitesse d'une particule simultanément. Plus exactement, $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$. Il n'y a rien là de mystérieux , ceci découle simplement de la relation entre une fonction et sa transformée de Fourier, comme nous allons le voir.

Résultat préliminaire 1. Nous avons déjà rencontré l'inégalité de Schwarzt. Dans l'espace des fonctions complexes de carré sommable, cela s'écrit

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x)g_2(x)dx\right|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x)g_1^*(x)dx\right) \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_2(x)g_2^*(x)dx\right) \quad (6)$$

L'égalité n'est réalisée que si les deux fonctions sont proportionnelles : $g_1(x) = \lambda g_2(x)$. L'exposant $*$ dénote le complexe conjugué.

Résultat préliminaire 2 : relation de parseval. Nous admettons dans la suite la relation de parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f^*(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(q)\tilde{f}^*(q)dq$$

où $\tilde{f}(q)$ désigne la transformée de Fourier de $f(x)$.

1. En utilisant les règles de manipulation des TF et la relation de parseval, démontrez que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{dx}\frac{df^*}{dx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} q^2\tilde{f}(q)\tilde{f}^*(q)dq$$

2. Nous allons maintenant nous intéresser à une fonction $f(x)$ réelle (sa TF n'a aucune raison d'être réelle) telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2dx = 1$. (i) qu'est ce que cela implique pour le comportement de $f(x)$ quand $x \to \pm\infty$? (ii) En effectuant une intégration par partie, démontrez que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)f'(x)dx = -1/2$$

3. En choisissant $g_1(x) = xf(x)$ et $g_2(x) = f'(x)$ dans l'inégalité de Schwarz ((6)), démontrez que

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)^2dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} q^2\left|\tilde{f}(q)\right|^2dq\right) \geq \pi/2$$

Le premier terme entre parenthèse est appelé l'extension spatiale $(\Delta x)^2$ et le deuxième terme l'extension fréquentielle $(\Delta q)^2$. On en déduit donc que $\Delta x \Delta q \geq \sqrt{\pi/2}$. Vous verrez bientôt en mécanique quantique la relation qui existe entre la vitesse d'une particule et la fréquence q.

4. L'inégalité de Schwartz devient une *égalité* si $g_1(x) = \lambda g_2(x)$, où λ est une constante. Démontrez que cela implique que la fonction $f(x)$ soit une gaussienne. Quelle doit être le signe de λ pour que la fonction soit de carré sommable ?

5. La démonstration que nous avons effectué plus haut supposait que la fonction $f(x)$ soit réelle. Nous n'avons pas besoin de cette supposition. Supposons maintenant simplement que $\int f(x)f(x)^*dx = 1$. En vous inspirant du point 2, démontrer alors que

$$\text{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)f'(x)^*dx\right) = -1/2$$

[Help : pour un nombre complexe z, $2\text{Re}(z) = z + z^*$]. Complétez alors la démonstration de la question 3 comme précédemment en prenant $g_1(x) = xf(x)$ et $g_2(x) = f'(x)^*$. Il suffit de se souvenir alors que pour un nombre complexe, $|z|^2 \geq \text{Re}(z)^2$.

6. Si il vous reste du temps, démontrer la relation de Parseval. **Help :** Il suffit d'écrire la définition de $\tilde{f}(q)$ et de son conjugué, multiplier l'un par l'autre et intégrer sur q. Pour effectuer cette dernière intégrale, il suffit d'inverser l'ordre d'intégration et utiliser la définition de la distribution $\delta(x) = (1/2\pi)\int \exp(iqx)dq$