Corrigé de l'examen de Mathématiques,

L3 Physique-Chimie

Décembre 2006

Résolution de l'equation d'onde.

1. En prenant une TL par rapport à t, nous trouvons

$$s\hat{\phi}(x,s) - c\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x} = F(x)$$

En prenant maintenant une TF par rapport à x,

$$(s - icq)\tilde{\hat{\phi}}(q,s) = \tilde{F}(q)$$

qui est bien le résultat recherché.

2. L'originale de $b/(s-a)$ est évidement $b\exp(at)$. Nous avons donc, en prenant la TL-inverse de l'expression précédente ($\tilde{F}(q)$ est une constante vis à vis de s)

$$\tilde{\phi}(q,t) = \tilde{F}(q)\exp(ictq)$$

3. La régle de translation nous indique que $\text{TF}[f(x-a)] = \exp(-iaq)\text{TF}[f(x)]$. En identifiant a à $-ct$ dans l'expression ci-dessous, nous trouvons donc

$$\phi(x,t) = F(x+ct)$$

4. Il est évident que l'équation sur ψ est la même que l'équation sur ϕ, si on change la constante c en $-c$. Donc,

$$\psi(x,t) = G(x-ct)$$

5. Nous avons

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} \text{ et } \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

Ce qui nous donne

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - c\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Par ailleur

$$\begin{aligned}\phi(x,0) &= \partial_t u|_{t=0} + c\partial_x u(x,0)\\ &= g(x) + cf'(x)\end{aligned}$$

Et donc,

$$\phi(x,t) = g(x+ct) + cf'(x+ct)$$

Le calcul est identique pour ψ. La seule différence est la condition initiale pour ψ : $\psi(x,0) = g(x) - cf'(x)$. Ce qui nous donne

$$\psi(x,t) = g(x-ct) - cf'(x-ct)$$

6. Obtenir l'expression de $\partial_t u$ est trivial. En l'intégrant, nous obtiendrions $u(x,t)$:

$$u(x,t) = u(x,0) + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial\tau}d\tau$$

Nous avons quatre termes à integrer. D'abord, les fonctions f :

$$\pm\int_0^t f'(x\pm c\tau)d\tau = \frac{1}{c}\left(f(x\pm ct) - f(x)\right)$$

Pour les intégrales des fonctions g, notons que par exemple, si on effectue le changement de variable $y = x + c\tau$, et donc $d\tau = (1/c)dy$, nous trouvons

$$\int_0^t g(x+c\tau)d\tau = \frac{1}{c}\int_x^{x+ct} g(y)dy$$

De même, si on pose $y = x - c\tau$, et donc $d\tau = (-1/c)dy$, nous trouvons

$$\begin{aligned}\int_0^t g(x-c\tau)d\tau &= -\frac{1}{c}\int_x^{x-ct} g(y)dy\\ &= \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x} g(y)dy\end{aligned}$$

En se souvenant que $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$, et en combinant les quatre integrales ci-dessus, nous trouvons l'expression recherchée.

Les Fonctions trigonomotréque-intégrales.

1. Nous avons

$$\begin{aligned}\int_s^\infty \tilde{f}(\sigma)d\sigma &= \int_s^\infty\int_0^\infty f(t)\exp(-\sigma t)dtd\sigma\\ &= \int_0^\infty\int_s^\infty f(t)\exp(-\sigma t)d\sigma dt\\ &= \int_0^\infty f(t)\left(\int_s^\infty \exp(-\sigma t)d\sigma\right)dt\\ &= \int_0^\infty f(t)\left[\exp(-\sigma t)/t\right]_{\sigma=s}^{\sigma=\infty}dt\\ &= \int_0^\infty (1/t)f(t)\exp(-st)dt\\ &= \text{TL}[f(t)/t]\end{aligned}$$

2. Nous allons partir de la TL de $\sin t$, et lui appliquer une suite d'opération.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TL}[\sin t] &= \frac{1}{s^2+1} \\
\mathrm{TL}[\sin t/t] &= \int_s^\infty \frac{d\sigma}{\sigma^2+1} \\
&= Arctg(\infty) - Arctg(s) \\
&= \pi/2 - Arctg(s) \\
\mathrm{TL}[\int_0^t \sin\tau/\tau] &= (1/s)\,(\pi/2 - Arctg(s))
\end{aligned}
$$

3. La fonction ci-dessus possède un pôle à $s=0$. Quand $s\to 0$, $(1/s)\,(\pi/2 - Arctg(s)) \approx (\pi/2)(1/s)$, donc $Si(t)\approx \pi/2$ quand $t\to+\infty$.

Le principe d'incertitude.

1. Nous savons que $\mathrm{TF}[f'(x)] = iq\mathrm{TF}[f(x)]$. Il suffit donc d'appliquer la relation de parseval à cette dernière :

$$
\begin{aligned}
\int_I \frac{df}{dx}\frac{df^*}{dx}dx &= (1/2\pi)\int_I (iq)\tilde{f}(q)(-iq)\tilde{f}^*(q)dq \\
& (1/2\pi)\int_I q^2\tilde{f}(q)\tilde{f}^*(q)dq \qquad (2)
\end{aligned}
$$

2. Comme $f(x)$ est de carré sommable, $f(x)\to 0$ quand $x\to\pm\infty$. Nous pouvons être encore plus précis : $f^2(x)$ doit tendre vers 0 plus rapidement que $1/x$, ou plus exactement $xf^2(x)\to 0$ quand $x\to\infty$; dans le cas contraire, $f(x)$ ne serait pas de carré sommable.

Maintenant, pour démontrer l'égalité, on effectue une intégration par partie en prenant $U = xf(x)$ et $dV = f'(x)dx$:

$$\int_I xf(x)f'(x)dx = \left[xf(x)^2\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_I \left(f(x)+xf'(x)\right)f(x)dx$$

Le terme entre crochet est nul d'après ce que nous venons de dire sur la vitesse de convergence de f. De plus, on utilise le fait que $\int f(x)^2dx = 1$ pour obtenir

$$2\int_I xf(x)f'(x)dx = -1$$

3. En appliquant l'ingalité de Schwarz, nous obtenons

$$\left(\int_I x^2f(x)^2dx\right)\left(\int_I f'(x)^2dx\right)\geq 1/4$$

En utilisant la relation (2), on obtient

$$\left(\int_I x^2f(x)^2dx\right)\left(\int_I q^2\left|\tilde{f}(q)\right|^2dx\right)\geq \pi/2$$

Le premier terme entre parenthèse désigne l'extension spatiale $(\Delta x)^2$, le deuxième terme l'extension fréquentielle $(\Delta q)^2$. Ce qui nous donne

$$\Delta x\Delta q \geq \sqrt{\pi/2}$$

4. Nous devons donc avoir

$$xf(x) = \lambda f'(x)$$

Il n'est pas difficile de vérifier qu'une gaussienne $\exp(x^2/2\lambda)$ vérifie l'équation ci-dessus. Nous aurions pu démnotrer cela directement en reécrivant l'équation

$$df/f = (1/\lambda)xdx$$

qui en intégrant, nous donne $f(x) = C\exp(x^2/2\lambda)$. Evidement, pour avoir une fonction de carré sommable, nous devons avoir $\lambda < 0$.

5. En effectuant une intégration par partie, nous trouvons

$$\int_I xf(x)f'(x)^*dx = [xf(x)f(x)^*]_{-\infty}^{\infty} - \int_I \left(f(x)+xf'(x)\right)f(x)^*dx$$

Ce qui nous donne

$$\left(\int_I xf(x)f'(x)^*dx\right) + \left(\int_I xf(x)^*f'(x)dx\right) = -1$$

Si on dénote par I le terme entre parenthèse, nous voyons qu'à gauche de l'équation, nous avons $I+I^*$, ce qui n'est rien d'autre que $2\mathrm{Re}(I)$. Le reste de la démonstration est trivial.

6. En suivant le Help, nous avons

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-iqx)dx \\
\tilde{f}(q)^* &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^*\exp(+iqx)dx
\end{aligned}
$$

En multipliant les deux lignes et en renommant un des indexes d'intégration y, nous trouvons :

$$\tilde{f}(q)\tilde{f}(q)^* = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(y)^*\exp(-iq(x-y))dxdy$$

Nous intégrons maintenant les deux cotés de l'équation sur q. A gauche, nous pouvons changer l'ordre d'intégration et intégrer d'abord sur q, et ensuite sur $dxdy$. Par définition du δ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-iq(x-y))dq = 2\pi\delta(x-y)$$

Ce qui nous donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(q)\tilde{f}(q)^*dq = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(y)^*\delta(x-y)dxdy$$

Or,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)^*\delta(x-y)dy = f(x)^*$$

Par définition de la distribution δ, et on trouve finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(q)\tilde{f}(q)^*dq = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(x)^*dx$$