Examens de Mathématiques.

Licence Physique Recherche

Octobre 2007

A. Traitement thermique différentiel.

Objectif. L'opération de *trempe* en métallurgie consiste à mener une pièce en acier au delà d'une température critique T_c et de le refroidir rapidement en le plongeant dans un bain de liquide. Cela confère à la pièce beaucoup de dureté. Dans certaines pièces métalliques comme le vilebrequin, on souhaite disposer d'un acier très dur à la superficie de la pièce et d'un acier doux au coeur. Pour cela, on crée une zone de chauffage locale intense en utilisant l'effet de peau (les ondes électromagnétique ne pénètre que peu profondément dans les pièces métallique) et avant que la température au coeur ait atteint une valeur critique, on trempe la pièce. Ainsi seul une couche extérieure acquiert les propriétés de l'acier trempé. Nous allons regarder de plus près ce problème à l'aide des séries de Fourier.

1. Un peu de calcul. Décomposer les fonctions 1, x, x^2 en série de cosinus sur l'intervalle $[0,L]$. En déduire les coefficients de la décomposition de la fonction $x(L-x)/L$ en série de cosinus. Nous appellerons dorénavant ces derniers α_n.

Le problème. Nous souhaitons résoudre l'équation de la chaleur dans un barreau initialement à température nulle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} &= -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = -J \\ u(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

La quantité J représente le flux de chaleur injectée dans le barreau à ses deux extrémités par l'effet de peau ; La fonction $u(x,t)$ représente la température au point x à l'instant t ; D est le coefficient de diffusion. Comme vous pouvez le constater, les conditions aux limites ne nous permettent pas bien de traiter ce problème à l'aide des séries de sinus ou de cosinus, nous devons donc les régulariser.

2. Régularisation. Au lieu de chercher directement u, nous chercherons plutôt la fonction ϕ

$$\phi(x,t) = u(x,t) + f(x)$$

qui a des conditions aux limites plus sympathiques. Trouver une fonction $f(x)$ polynomiale telle que $\partial\phi/\partial x|_{x=0} = \partial\phi/\partial x|_{x=L} = 0$. Nous souhaitons un polynôme de degrés le plus bas possible ; si il reste des constantes à déterminer, nous pouvons de plus imposer $f(0) = 0$. Tracer la fonction $f(x)$.

3. A quelle équation obéit $\phi(x,t)$? Résoudre cette dernière à l'aide des séries de sinus ou de cosinus. **Attention :** le choix de la base dépend des conditions aux limites, choisissez la base qui vous permet d'effectuer les opérations de dérivation ; dans tous les cas, *vous devez justifier* la légalité de vos dérivations. Pour simplifier les notations, posez $\omega_n = D(n\pi/L)^2$ et $\Omega = 2DJ/L$; quelle sont les dimensions de ω_n et Ω ?

4. Montrez enfin que l'expression complète de $u(x,t)$ est la suivante

$$u(x,t) = T_s\left\{\tau + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2}\left(1-e^{-n^2\tau}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\} \tag{1}$$

où nous avons posé $\tau = \omega_1 t$ et $T_s = 2JL/\pi^2$ [Quelle est la dimension de T_s ?]. En fait, comme vous pouvez le constater, l'utilisation de la variable τ revient à mesurer le temps non pas en seconde, mais par rapport au temps caractéristique du système $1/\omega_1$ qui dépend du coefficient de diffusion et de la dimension du barreau. De la même façon, T_s est une température caractéristique du système qui dépend de la chaleur injectée et de la dimension du barreau.

Dans la limite des grands temps (que veut dire le mot grand ici ?), que vaut la fonction $u(x,t)$? Donnez une représentation graphique de cette fonction pour trois temps (tous grand) différents. Est-ce que l'équation ci-dessus est dimentionnellement correcte ?

5.Température à $L/2$. Notre souhait est de garder le milieu du barreau loin de la température critique. Comme les harmoniques impaires sont d'amplitude

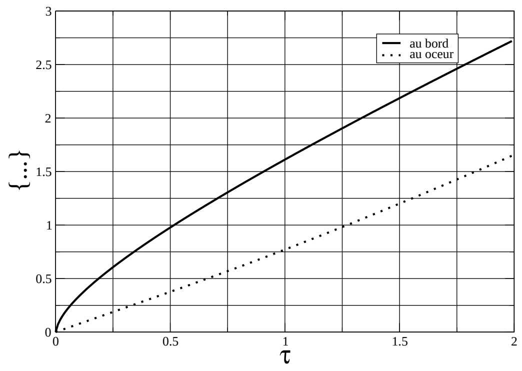

FIG. 1: La tabulation des expression entre {...} au bord et au coeur($= L/2$) de l'élément en fonction du temps réduit τ.

nulle dans l'expression(1), nous pouvons la simplifier quelque peu. Démontrer que pour $x = 0, L/2$, nous avons

$$\begin{aligned} u(0,t) &= T_s \left\{ \tau + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m^2} \left(1 - e^{-4m^2\tau} \right) \right\} \\ u(L/2,t) &= T_s \left\{ \tau + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m^2} \left(1 - e^{-4m^2\tau} \right) \right\} \end{aligned}$$

La figure 1 montre la tabulation de l'expression entre {} en fonction de τ. Sachant que la température critique $T_c = 1.5T_s$, à quel moment faut-il arrêter le chauffage et plonger l'élément dans un bain pour que l'extérieur soit trempé et l'intérieur tendre ?

B. EDP $\partial 1$

0. Objectif. Nous souhaitons résoudre une EDP de premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

sur l'intervalle $x \in]-\infty, \infty[$ et $t \in [0, +\infty[$avec la condition initiale $u(x,0) = f(x)$.

1. Préliminaire. Démontrer que l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{y} + ay = 0$$

avec la condition initiale $y(0) = y_0$ d'une part, et l'équation

$$\dot{y} + ay = y_0\delta(t)$$

ont la même solution pour $y \geq 0$. En fait, comme vous le voyez, nous pouvons utiliser les δ pour inclure la condition initiale directement dans l'équation.

2. Résoudre l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = \delta(t)f(x)$$

Help : Une TF par rapport à x et l'utilisation du résultat de la question précédente peuvent être utiles. Une fois l'équation résolue dans l'espace réciproque, on peut facilement revenir dans l'espace direct si l'on se souvient des règles de manipulations des TF.

3. En vous inspirant des affirmations de la question préliminaire, donner la solution de l'objectif recherché.

C. Autour de la distribution de Dirac.

1. la propriété fondamentale de la distribution de Dirac $\delta(x)$ est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0)$$

pour une fonction f, dont nous supposons que la transformée de Fourier existe. Nous admettons que la manipulation de δ sous l'intégrale obéit aux règles usuelles de l'analyse. Donnez alors l'expression des distributions suivantes

$$\delta(-x), \delta(ax)$$

($a \in \mathbb{R}$) en terme de $\delta(x)$. **Help.** On étudie une distribution par son action sur une fonction ; attention au signe de a : considérer les deux cas $a > 0$ et $a < 0$.

2. Considérons maintenant une fonction $g(x)$ avec un zéro simple en x_0 : $g(x_0) = 0$, $g'(x_0) \neq 0$. Prenons un intervalle $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ autour de x_0(on peut supposer a aussi petit que l'on veut). En développant g autour de sa racine à l'ordre 1, démontrez que

$$\int_I \delta(g(x))f(x)dx = \frac{1}{|g'(x_0)|}f(x_0)$$

3. En supposant maintenant que la fonction $g(x)$ n'a que des racines simples, et en utilisant le résultat ci-dessus, démontrer :

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x - x_i)$$

où les x_i sont les racines simples de $g(x)$. Donner comme application l'expression de $\delta(x^2 - a^2)$. [**Help :** Il suffit d'écrire une intégrale sur $]-\infty, \infty[$ comme une somme d'intégrale autour des racines et entre les racines]

4. Dans la question 2, nous nous somme restreint à un développement à l'ordre 1 de la fonction g autour de sa racine. Pouvez vous indiquer pourquoi nous pouvions nous restreindre à l'ordre 1 ?