Examens de Mathématiques L3PR, Octobre 2007, corrigé.

15 octobre 2007

A. Traitement de surface.

1. Nous avons

$$f(x) = 1 \ \rightarrow a_0 = 1, a_n = 0$$

$$f(x) = x \ \rightarrow a_0 = L/2, a_n = \frac{2L}{n^2\pi^2}(-1+(-1)^n)$$

$$f(x) = x^2 \ \rightarrow a_0 = L^2/3, a_n = \frac{4L^2}{n^2\pi^2}(-1)^n$$

Cela nous donne pour $x(L-x)/L$

$$\alpha_0 = L/6 \ , \ \alpha_n = -\frac{2L}{n^2\pi^2}(1+(-1)^n)$$

Nous appelerons les coefficients ci-dessus α_n.

2. Nous devons choisir $f(x)$ tel que $\partial_x u + f'(x)$ s'annule en $x = 0, L$. C'est à dire nous devons avoir

$$f'(0) = J \, ; f'(L) = -J$$

Manifestement, un polynôme de degrès 1 n'est pas suffisant. Pour $f(x) = ax^2+bx+c$, nous devons avoir

$$\begin{aligned} b &= J \\ 2aL+b &= -J \end{aligned}$$

ce qui nous donne, en choisissant $c = 0$

$$f(x) = \frac{J}{L}x(L-x)$$

3. Comme $\phi(x,t) = u(x,t) + f(x)$, nous avons

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2J}{L}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} &= D\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{2DJ}{L} \\ \phi(x,0) &= \frac{J}{L}x(L-x) \\ \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=0} &= -\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \end{aligned}$$

En décomposant dans la base des cosinus,

$$\phi(x,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\cos(\pi n x/L)$$

et en réinjectant dans l'équation originale, on trouve

$$\begin{aligned} a_0'(t) &= \Omega \\ a_n'(t) &= -\omega_n a_n(t) \end{aligned}$$

où nous avons posé $\Omega = 2DJ/L$ et $\omega_n = D(n\pi/L)^2$. Cela nous donne

$$a_0(t) = \Omega t + K$$

et

$$a_n(t) = A_n e^{-\omega_n t}$$

c'est à dire finalement

$$\phi(x,t) = \Omega t + K + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\omega_n t} \cos(\pi n x/L)$$

Pour trouver les coefficients A_n, nous utilisons les conditions initiales

$$\phi(x,0) = f(x) = J\alpha_0 + J\sum_n \alpha_n \cos(\pi n x/L)$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} K &= JL/6 \\ A_n &= J\alpha_n \end{aligned}$$

4. Comme $u = \phi - f$, nous avons enfin

$$u(x,t) = \Omega t + J\sum\nolimits_{n=1} \alpha_n (e^{-\omega_n t} - 1)\cos(n\pi x/L)$$

Dans l'expression ci-dessus, remarquons que nous pouvons écrire d'abord que $\omega_n t = n^2\omega_1 t = n^2\tau$ et $\Omega t = (\Omega/\omega_1)\tau = (2JL/\pi^2)\tau$. En posant $T_s = (2JL/\pi^2)$ et en nous souvenant de l'expression des α_n, nous avons ce que nous cherchons. Remarquons que $[J] = [u]/L$ (ceci vient directement de la condition au limite) et donc JL a bien la dimension d'une température.

Dans la limite des temps grands, c'est à dire $t \gg 1/\omega_0$, tous les exponentielles sont amorties et à une constante près, la somme représente la fonction $-f(x)$:

$$u(x,t) \approx \Omega t - f(x)$$

ce qui représente un parabole dont la valeur minimum augment linéarement avec le temps.

5. Comme les amplitudes des harmoniques impaires sont nulles, nous pouvons poser $n = 2m$. Cela nous donne

$$u(x,t) = T_s \left\{ \tau + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m^2}\left(1 - e^{-4m^2\tau}\right)\cos\frac{2m\pi x}{L} \right\}$$

Pour $x = 0, L$ le cos... vaut toujours 1 ; pour $x = L/2$, $\cos(m\pi x) = (-1)^m$.

B. EDP $\partial 1$.

1. trivial.

2. En prenant une TF par rapport à x, on trouve ($u(x,t) \to \tilde{u}(q,t)$)

$$\partial_t \tilde{u}(q,t) - icq\tilde{u}(q,t) = \delta(t)\tilde{f}(q)$$

et donc

$$\tilde{u}(q,t) = \tilde{f}(q)e^{icqt} = \tilde{f}(q)e^{i(ct)q}$$

Nous devons maintenant prendre la TF inverse de cela. La règle de translation des TF nous dit

$$\mathrm{TF}[f(x+a)] = e^{iaq}\mathrm{TF}[f(x)]$$

En prenant la TF inverse, nous trouvons donc

$$u(x,t) = f(x+ct)$$

Vous pouvez toujours réinjecter cette expression dans l'EDP pour vérifier que c'est bien la solution.

3. On voit donc que l'EDP de degrès 1 propage sans déformation la condition initiale.

C. La distribution de Dirac.

1. On applique $\delta(-x)$ à une fonction quelconque :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(-x)f(x)dx &= -\int_{+\infty}^{-\infty}\delta(x)f(-x)dx \\ &= f(-0)=f(0)\end{aligned}$$

d'où on déduit que $\delta(-x)=\delta(x)$.

En faisant la même démarche, on trouve que

$$\delta(ax)=\delta(x)/|a|$$

2. Soit l'intégrale

$$I=\int_{x_0-a}^{x_0+a}\delta(g(x))f(x)dx$$

Nous pouvons effectuer le changement de variable $x=u+x_0$ pour nous centrer autour de la racine. A l'ordre 1 dans ce voisinage,

$$g(x)=g(x_0+u)=g(x_0)+g'(x_0)u=g'(x_0)u$$

et donc

$$I=\int_{-a}^{+a}\delta\left(g'(x_0)u\right)f(x_0+u)du$$

qui d'après la question 1 nous donne $I=f(x_0)/|g'(x_0)|$.

3. Quand nous manipulons un $\delta()$, seul le voisinge où l'argument est nul "compte". En dehors de ce voisinage, l'application de δ à une fonction rend une valeur nulle. Nous pouvons donc restreindre une intégrale comprenant un δ qu'aux voisinages des zéros des arguments et écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(g(x)\right)f(x)dx=\sum_i\int_{x_i-a}^{x_i+a}\delta\left(g(x)\right)f(x)dx$$

où les x_i sont les zéro (simples) de la fonction g et en déduire finalement

$$\delta\left(g(x)\right)=\sum_i\frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x-x_i)$$

Une application immédiate de cela est donc

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2|a|}\left(\delta(x-a)+\delta(x+a)\right)$$

4. Nous avons vu en cours que nous pouvons développer les δ en série de Taylor :

$$\delta(x+a)=\delta(x)+a\delta'(x)+\ldots$$

Supposons que nous avions poussé le développement à l'ordre 2 en u :

$$g(x)=g'(x_0)u+(1/2)g''(x_0)u^2+O(u^3)$$

Nous avons alors

$$\delta(g(x))=\delta(g'(x_0)u)+(1/2)g''(x_0)u^2\delta'(g'(x_0)u)$$

Or, nous savons que δ' échantillone la dérivée, et que la dérivée de la fonction $u^2f(x_0+u)$ est nulle en $u=0$. Cela se généralise facilement aux ordres supérieurs du développement.