Examens de Mathématiques.

Licence Physique Recherche, Janvier 2008.

Notes importantes :

1. La première partie de l'examen est non-bloquante. Si vous ne savez pas résoudre une question, admettez la solution et passez à la question d'après.
2. La copie que vous remettez *n'est pas* un brouillon. Faites vos calculs sur les brouillons à votre disposition et ne recopiez que des résultats propres. Votre professeur ne cherchera pas la solution dans votre copie à travers une jungle de ratures et de recorrections.

A Théorème H.

Introduction. Nous souhaitons déterminer la fonction $c(x,t)$ obéissant à l'équation

$$\int_{p=0}^{1}\int_{x_1=0}^{\infty}\int_{x_2=0}^{\infty} c(x_1)c(x_2)\delta(p(x_1+x_2)-x)\,dx_2dx_1dp - c(x) = 0 \quad (1)$$

δ désigne bien-sûr la distribution δ de Dirac. Cette équation est à la base du théorème H établit par Boltzmann vers 1870 et forme le coeur de la théorie cinétique des gaz et de la physique statistique. Nous allons voir ici qu'aussi intimidant qu'elle paraisse à priori, cette équation se traite en faite facilement par les outils que nous avons vus dans notre cours. Du point de vue de la physique, la variable x dénote l'énergie cinétique ; $c(x)$ est le nombre de molécules ayant l'énergie x ; p désigne le taux de distribution d'énergie après le choc entre deux particules. Comme les molécules ont une énergie cinétique positive,

$$c(x) = 0 \quad \text{si } x < 0 \qquad (2)$$

1. Nous pouvons effectuer l'intégrale triple ci-dessus dans l'ordre que nous voulons. Nous commencerons par intégrer sur x_2. Démontrer alors que l'intégrale triple se transforme en une intégrale double

$$\int_{p=0}^{1}(1/p)\int_{x_1=0}^{\infty} c(x_1)c(x/p-x_1)dx_1dp \qquad (3)$$

2. En utilisant la condition (2), montrer que l'intégrale double ci-dessus se ramène à

$$\int_{p=0}^{1}(1/p)\int_{x_1=0}^{x/p} c(x_1)c(x/p-x_1)dx_1dp$$

L'intégrale sur x_1 commence à prendre la tête d'un produit de convolution, nous avons intérêt à passer en TL.

3. Concentrons nous sur l'intégrale sur x_1 :

$$I_1(x) = \int_{x_1=0}^{x/p} c(x_1)c(x/p-x_1)dx_1$$

et passons en Transformé de Laplace $x \overset{\text{TL}}{\rightarrow} \beta$, $c(x) \overset{\text{TL}}{\rightarrow} \hat{c}(\beta)$, $I_1(x) \overset{\text{TL}}{\rightarrow} \hat{I}_1(\beta)$. Nous savons, d'après la règle des dilatation en TL, que

$$\text{TL}[f(x/p)] = p\hat{f}(\beta p)$$

En utilisant cette relation, et le résultat sur les produits de convolution, démontrer que

$$\hat{I}_1(\beta) = p\hat{c}(\beta p)^2$$

Et donc que l'équation du bilan (1) se met sous la forme

$$\int_{p=0}^{1}\hat{c}(\beta p)^2dp - \hat{c}(\beta) = 0$$

Effectuez un dernier changement de variable évident pour mettre le résultat sous la forme de

$$\frac{1}{\beta}\int_0^{\beta}\hat{c}(u)^2du - \hat{c}(\beta) = 0 \qquad (4)$$

4. Vérifier que la fonction

$$\hat{c}(\beta) = \frac{A}{\beta + A}$$

où A est une constante est solution de l'équation (4) ci-dessus.

5. Soit

$$T = \int_0^\infty x c(x) dx$$

T représente l'énergie totale du gaz. Démontrer que

$$T = - \left. \frac{\partial \hat{c}(\beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=0}$$

En déduire que

$$A = 1/T$$

6. En déduire que la distribution des énergies dans le système à l'état stationnaire est

$$c(x) = \frac{1}{T} e^{-x/T}$$

On prétend que cette formule est gravée sur la tombe de Boltzmann.

B Fonctionnelle et perturbation.

Rappelons qu'une fonctionnelle est une fonction de fonction, prenant une fonction en entrée et produisant un *scalaire* en sortie. Soit la fonctionnelle H définie par

$$H[c(x)] = \int_0^\infty \{c(x).\log[c(x)] - \lambda c(x) - \mu x c(x)\} dx$$

où $c(x)$ est une fonction et λ, μ deux scalaires.

1. Nous souhaitons calculer la perturbation à l'ordre 1 de H, cet à dire la quantité

$$\delta H = H[c(x) + \varepsilon g(x)] - H[c(x)]$$

Démontrer qu'à l'ordre 1 en ε, cette variation se met sous la forme de

$$\delta H = \varepsilon \int_0^\infty (\ldots) g(x) dx + O(\varepsilon^2)$$

où vous devez calculer l'expression $(\ldots)$.

2. Quelle condition doit réaliser la fonction $c(x)$ pour que δH soit nulle à l'ordre 1 en epsilon, *quelque soit* la fonction $g(x)$? Donner alors l'expression de la fonction $c(x)$. On dit alors que la fonction $c(x)$ est un extremum de la fonctionnelle H.

3. Trouver les valeurs de μ et de λ à l'aide des deux relations que nous admettons :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty c(x) dx &= 1 \\ \int_0^\infty x c(x) dx &= T \end{aligned}$$

et donner la forme de c en fonction de x et de T seulement. **Help** : Nous supposons $\mu < 0$ et nous savons que $\int_0^\infty x \exp(-x) dx = 1$. La fonctionnelle H est appelée l'entropie ; la forme de la fonction $c(x)$ que vous avez trouvée maximise l'entropie.

C Opérateurs.

1. Dans l'espace des fonctions à trois variables, l'opérateur L_z est définie en coordonnées cartésiennes par $L_z = x(\partial/\partial y) - y(\partial/\partial x)$. En utilisant les règles de dérivation en chaîne, démontrer que $L_z = \partial/\partial\phi$, où en coordonnées sphérique, ϕ est la variable qui mesure l'angle de la projection du rayon vecteur avec l'axe x. Que représente l'opérateur $\exp(\alpha L_z)$ où α est un scalaire réel ?

2. Dans l'espace des fonctions de trois variables à valeurs complexes, donner la forme générale, en coordonnées sphériques, des fonctions propres et des valeurs propres de l'opérateur L_z. Démontrer en particulier que les valeurs propres doivent s'écrire comme $\pm in$, où n est un nombre entier.

3. Dans l'espace mentionné ci-dessus, est ce que l'opérateur L_z est hermitien ? Est ce que l'opérateur iL_z est hermitien ?