1 Orthogonalité.

Soit les deux fonctions u_α et u_β solution de l'équation de Bessel

$$\begin{aligned} x^2u''_\alpha + xu'_\alpha + (\alpha^2x^2 - \nu^2)u_\alpha &= 0 \\ x^2u''_\beta + xu'_\beta + (\beta^2x^2 - \nu^2)u_\beta &= 0 \end{aligned}$$

On multiplie la première équation par u_β/x, la deuxième par u_α/x, et on intégre entre 0 et L. Nous obtenons alors trois termes $I = I_1 + I_2 + I_3 = 0$ où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^L x(u''_\alpha u_\beta - u''_\beta u_\alpha)dx \\ I_2 &= \int_0^L (u'_\alpha u_\beta - u'{}_\beta u_\alpha)dx \\ I_3 &= (\alpha^2 - \beta^2)\int_0^L xu_\alpha u_\beta dx \end{aligned}$$

Une première intégration par partie sur I_1 nous donne

$$I_1 = \left[x\left(u'_\alpha u_\beta - u'_\beta u_\alpha\right)\right]_0^L - \int_0^L (u'{}_\alpha u_\beta - u'{}_\beta u_\alpha)dx$$

et nous voyons que le terme intégrale annule exactement le terme I_2. Nous avons donc finalement

$$\left[x\left(u'_\alpha u_\beta - u'_\beta u_\alpha\right)\right]_0^L + (\alpha^2 - \beta^2)\int_0^L xu_\alpha u_\beta dx = 0 \qquad (1)$$

Si maintenant α et β sont relié aux zéro J_ν par $\alpha = \zeta_{\nu n}/L$ et $\beta = \zeta_{\nu m}/L$ et que $u_\alpha = J_\nu(\alpha x)$, $u_\beta = J_\nu(\beta x)$, alors il est évident que $u_\alpha(L) = u_\beta(L) = 0$ donc le terme de conditions aux bord $[] = 0$. Nous en déduisons que si $\alpha \neq \beta$, $\int ()dx = 0$ et nous avons bien l'orthogonalité.

Ces fonctions jouent exactement le rôle des sin et cos et peuvent être utilisée pour des expansion en série de Bessel-Fourier : une fonction assez honnête peut se décomposer sur l'intervalle $[0, L]$ comme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_\nu(\zeta_{\nu n}x/L)$$

où les coefficients c_n sont donnés par

$$c_n = \frac{1}{A_{\nu n}}\int_0^L xf(x)J(\zeta_{\nu n}x/L)dx$$

où comme il se doit, $A_{\nu n} = \int_0^L xJ_\nu^2(\zeta_{\nu n}x/L)dx = L^2\int_0^1 xJ_\nu^2(\zeta_{\nu n}x)dx$. A vrai dire, un peu d'adresse [1]nous permet de calculer la valeur de cette intégrale

[1]et la connaissance des relations de reccurence entre les Bessel : $J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - (1/z)J_\nu(z)$

directement à partir de l'éq.(1), en prenant la limite $\alpha \to \beta$:

$$\int_0^1 xJ_\nu^2(\zeta_{\nu n}x)dx = J_{\nu+1}^2(\zeta_{\nu n})$$

Ces développements en série de Bessel-Fourier sont très utilisés dans les problèmes de vibration des membranes. Ce développement en série se transforme en Transformé de Hankel sur les intervalles infinis, exactement comme les TF sont une extension des SF.

2 La seconde solution fondamentale des SL.

La première partie nécessite simplement un peu de propreté dans les dérivaton, sinon l'exercice est auto-guidé. Pour l'équation de Legendre, nous avons $w\alpha = (1-x^2)$.Nous devons donc calculer d'abord

$$\int \frac{1}{x^2(1-x^2)}dx$$

Ce pour quoi, nous décomposons en fraction simple :

$$\frac{1}{x^2(1-x^2)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$$

L'intégration de cette dernière et sa maultiplication pas $y_1(x) = x$ nous donne finalement

$$y_2(x) = -1 + \frac{x}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

La deuxime solution de l'équation de Legendre (que l'on note souvent $Q_n(x)$) a toujours des singularité logarithmique aux points $x = \pm 1$.

3 Klein-gordon.

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*_{,x_i}} &= \epsilon_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} &= m^2 \phi_i \end{aligned}$$

En écrivant l'équation d'Euler-Lagrange du champ

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*_{,x_i}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = 0$$

nous trouvons donc

$$\sum_{i=0} \epsilon_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} - m^2\phi = 0$$

Si maintenant nous utilisons les notations habituelles $x_0 = t$ pour le temps, nous trouvons

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \Delta\phi = m^2\phi$$

On se souvient du cours de M.Q où l'opérateur energy est $E = i\partial_t$ et l'opérateur imulsion est $\mathbf{p} = -i\nabla$. Nous pouvons donc réecrire cette équation comme

$$\left(E^2 - p^2 - m^2\right)\phi = 0$$

4 Extremum et valeurs propres.

1. Il est évident que nous devons chercher l'extrémum de $S'[f] = S[f] - \lambda(f,f)$. La variation à l'ordre 1 de cette dernière s'écrit

$$\delta S' = \{(f,Lg) + (g,Lf) - \lambda(f,g) - \lambda(g,f)\}\,\epsilon$$

En utilisant le fait que L est hermitien, c'est à dire $(f,Lg) = (Lf,g)$ et qu'un produit scalaire est symétrique, c'est à dire $(f,g) = (g,f)$, nous pouvons mettre le terme entre accolade sous la forme de $2(Lf - \lambda f, g)$. Pour que la variation à l'ordre 1 soit nulle quelque soit la fonction g, nous devons avoir

$$Lf = \lambda f$$

(seul la fonction 0 est orthogonale à toutes les autres, par définition du produit scalaire).

2. Si L n'est pas hermitien, les même considération nous amène à

$$(L + L^\dagger)f = 2\lambda f$$

où $\dagger$ dénote l'opérateur adjoint. Remarquer que $(L + L^\dagger)$ est hermitien. N'importe quel opérateur peut se mettre sous la forme d'une somme de partie hermitien et anti-hermitien : $L = (L + L^\dagger)/2 + (L - L^\dagger)/2$. Vous voyez qu'il n'y a que la partie hermitienne qui intervient dans les problèmes de minimisation.