Examens de Mathématiques.

Université Joseph Fourier, Département de Physique, Licence Physique Recherche
(Dated: 10 octobre 2008)

I. DIFFUSION DANS LES TISSUS BIOLOGIQUES.

Objectif.

Beaucoup de molécules d'intêret biologique (protéines, hormones, ...) sont produites par certaines cellules spécialisées et sont ensuite exportées vers les autres cellules par simple diffusion. Ce mode de transport est particulièrement important lors du développement embryonnaire, quand les canaux sanguins et lymphatiques ne sont pas encore en place. Au cours de leurs diffusion, les molécules sont capturées par les recepteurs des cellules cibles et enlevées du milieu. La concentration $c(x,t)$ des molécules obéit à :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \gamma c \tag{1}$$

où D est le coefficient de diffusion et γ celui de capture. Les molécules sont injectées dans le milieu à l'extrémité $x = L$ à un flux constant J. Le tube où les molécules diffusent est bouché à $x = 0$ et impose un flux nul. Nous avons donc les conditions aux limites

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=0} = 0\ ;\ \left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=L} = J \tag{2}$$

A l'instant initiale $t = 0$, aucune molécule n'est présente

$$c(x,0) = 0 \tag{3}$$

L'équation (1) munie de ses conditions (2,3) est maintenant bien posée, et nous pouvons tenter de la résoudre.

A. Question préliminaire.

Démontrer que les coefficients de la décomposition de la fonction $f(x) = \cosh(\kappa x)$ sur la base des cosinus et dans l'intervalle $[0,L]$ sont

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= (1/\kappa L)\sinh(\kappa L)\\ \alpha_n &= \frac{2}{L}\frac{(-1)^n\kappa\sinh(\kappa L)}{\kappa^2+q_n^2}\end{aligned}$$

où κ est une constante et pour alléger l'écriture, nous avons noté $q_n = n\pi/L$. [**Help** : Remarquer que les fonctions cosh et cos sont juste des combinaisons d'exponentielles et qu'en plus, $\exp(iLq_n) = (-1)^n$]. Si L désigne une longueur, quelle sont les dimensions de κ, q_n, α_n ? Quelles seront les coefficients de la série de cosinus de la fonction

$$c_s(x) = (J/\kappa)\frac{\cosh(\kappa x)}{\sinh(\kappa L)} \tag{4}$$

où J est une constante ? **Ce seront dorénavant ces coefficients que nous appelerons les α_n.**

B. Recherche de la solution stationnaire.

Une solution stationnaire de l'équation (1) est une solution qui ne varie pas dans le temps, $\partial c/\partial t = 0$, et qui satisfait aux conditions aux limites (2). Vérifier que la solution stationnaire de l'eq.(1) avec les conditions aux bords (2) est la fonction $c_s(x)$ où nous avons posé $\kappa^2 = \gamma/D$.

C. Régularisation des conditions aux limites.

Telle quelle, les conditions aux limites se prêtent mal à un traitement par les séries de sinus et de cosinus. Une méthode courante de régularisation consiste à étudier la fonction centrée autour de sa solution stationnaire : au lieu de chercher la fonction $c(x,t)$, nous cherchons la fonction

$$\phi(x,t) = c(x,t) - c_s(x)$$

Une fois trouvé $\phi(x,t)$, il suffit de lui ajouter la fonction connue $c_s(x)$ pour trouver $c(x,t)$.

Montrer que ϕ obéit également à l'éq. (1). Quelles sont ses conditions aux limites et initiales ?

D. Résolution.

1. Resoudre l'équation de la fonction $\phi(x,t)$ en la décomposant sur une base de cosinus :

   $$\phi(x,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\cos(q_n x)$$

   Démontrer que la solution se met sous la forme

   $$\phi(x,t) = -\alpha_0 e^{-\gamma t} - \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e^{-(Dq_n^2+\gamma)t}\cos(q_n x)$$

   où les α_n sont les coefficients calculés au §I A. La validité des opérations de dérivation doit être scrupuleusement justifiée.
2. Donner $c(x,t)$ sous forme de sa série de cosinus (Alléluïa).
3. Sur quelle échelle de temps, la fonction $c(x,t)$ rejoint sa valeur stationnaire $c_s(x)$? Est-ce que cette échelle dépend de la taille L du tissu ? Pouvez vous justifier votre réponse par des arguments physiques ?

II. DIFFRACTION X PAR UN CRISTAL.

Avant propos. Un cristal est une répétition périodique d'un motif dans l'espace et depuis les travaux de Laue, Ewald,

... dans les années 1910, nous savons comment révéler ce motif par la diffraction des rayons X. Nous allons ici considérer les aspects mathématiques de cette théorie, La diffraction (de Fraunhauffer) étant essentiellement une Tranformée de Fourier. La réalisation expérimentale de ces calculs s'appelle la méthode du cristal tournant.

A. Questions préliminaires et Notations.

Rappeler rapidement ce que valent les expressions suivantes : (a) $\mathrm{TF}_x[\delta(x)]$; (b) $\mathrm{TF}_x[\exp(i\beta x)]$; (c) $(f * \delta_a)(x)$. Par TF_x, nous désignons une transformée de Fourier par rapport à la variable x ; $\delta_a(x) = \delta(x-a)$ est la distribution de Dirac translatée de a ; $*$ désigne le produit de convolution : $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-s)ds$.

B. Peigne de Dirac et sa TF.

Une peigne de Dirac est une répétition périodique de distributions δ :

$$\Psi_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-na)$$

1. Démontrer que $f(x)\Psi_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na)\delta(x-na)$ au sens des distributions.
2. Représentez graphiquement $\Psi_a(x)$ et $f(x)\Psi_a(x)$ où $f(x)$ est une fonction quelconque.
3. Démontrer que

$$\delta(\alpha x - \beta) = (1/\alpha)\delta(x - \beta/\alpha)$$

4. Démontrer que $\tilde{\Psi}_a(q) = \mathrm{TF}[\Psi_a(x)]$ est une somme d'exponentielles que vous préciserez.
5. Sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$, donner la valeur des coefficients σ_n de la série de Fourier de la fonction $\delta(x)$:

$$S_\delta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_n \exp(2i\pi nx)$$

Qu'elle est la périodicité de $S_\delta(x)$ sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$? Que représente $S_\delta(x)$ sur cet intervalle ? En déduire que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(inax) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (2\pi/a)\delta(x - 2\pi n/a)$$

6. Utiliser ce résultat pour démontrer enfin que

$$\tilde{\Psi}_a(q) = (2\pi/a)\Psi_{2\pi/a}(q)$$

C'est à dire que la TF d'une peigne de Dirac est une peigne de Dirac.

C. TF d'une fonction périodique.

1. Soit la fonction $f(x)$ non-nulle seulement sur l'intervalle $[0,a]$. Que represente la fonction $F(x) = (f * \Psi_a)(x)$? Représenter graphiquement f et F.
2. Que vaut $\tilde{F}(q) = \mathrm{TF}[F(x)]$? Représenter graphiquement les fonctions et distributions $f(x)$,$\Psi_a(x)$, $F(x)$ dans l'espace direct et dans l'espace réciproque. Bien sûr, nous n'avons pas précisé la fonction $f(x)$, vous êtes libre de la schématiser comme vous voulez.

[**Note** : Nous voyons ici pourquoi les tâches de diffraction par un cristal n'ont pas la même intensité, mais reflètent la densité électronique dans la maille élementaire du cristal].

D. TF d'une fonction périodique (alternative).

Nous aurions pu obtenir le résultat précédent directement. Soit une fonction $a-$périodique $F(x)$ et soit $f(x)$ son motif de répétition sur l'intervalle $[0,a]$. Nous pouvons représenter la fonction $F(x)$ sur l'intervalle $[0,a]$ par sa série de Fourier complexe :

$$S_F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(2i\pi nx/a) \tag{5}$$

1. Pourquoi sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ $F(x) = S_F(x)$?
2. Démontrer que $c_n = (1/a)\tilde{f}(2\pi n/a)$ où $\tilde{f}(q)$ représente la TF de la fonction $f(x)$. [**Help** : Ecrire la TF de $f(x)$, remarquer que cette fonction est nulle en dehors de l'intervalle $[0,a]$, et comparer à l'expression de c_n].
3. En prenant la TF de l'expression (5) et en utilisant le résultat précédent, démontrer que [Help : voir la question §II B.1]

$$\tilde{F}(q) = (2\pi/a)\tilde{f}(q)\Psi_{2\pi/a}(q)$$

III. LA MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTE.

Nous souhaitons résoudre l'équation suivante :

$$\dot{x} + \rho x = f(t) \tag{6}$$

Ceci est par exemple la réponse d'un oscillateur $x(t)$ dans un milieu fortement visqueux à une force dépendante du temps. Nous supposons la particule au repos au temps $t = -\infty$.

1. Résoudre la réponse de la particule à une force impulsionnelles $\delta(t)$.
2. Utiliser la réponse impulsionnelle obtenue pour démontrer que la soution de (6) est donnée par

$$x(t) = e^{-\rho t} \int_{-\infty}^{t} e^{\rho\tau} f(\tau) d\tau$$

3. Comment aurait-on peu obtenir cette réponse directement, en prenant la TF de l'équation (6) ?
4. Comment aurait-on résolu cette équation à l'aide de la méthode de la variation des constante ?