Examens de Mathématiques.

Université Joseph Fourier, Département de Physique, Licence Physique Recherche
(Dated: 10 octobre 2008)

I. DIFFUSION DANS LES TISSUS BIOLOGIQUES.

A. Objectif.

Nous devons résoudre

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \gamma c \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=0} = 0\,;\ \left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=L} = J \tag{2}$$

$$c(x,0) = 0 \tag{3}$$

B. Question préliminaire.

En appliquant la définition, le calcul est assez trivial pour α_0. Pour α_n, nous avons

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= (2/L)\int_0^L \cosh(\kappa x)\cos(q_n x)dx \\
&= \frac{2}{L}\frac{1}{4}\left\{\frac{e^{(\kappa+iq_n)L}}{\kappa+iq_n} + \frac{e^{(\kappa-iq_n)L}}{\kappa-iq_n} + \frac{e^{(-\kappa+iq_n)L}}{-\kappa+iq_n} + \frac{e^{(-\kappa-iq_n)L}}{-\kappa-iq_n}\right\} \\
&= \frac{2}{L}\frac{1}{4}(-1)^n\left\{\frac{e^{\kappa L}-e^{-\kappa L}}{\kappa+iq_n} + \frac{e^{\kappa L}-e^{-\kappa L}}{\kappa-iq_n}\right\} \\
&= = \frac{2}{L}\frac{(-1)^n\kappa\sinh(\kappa L)}{\kappa^2+q_n^2}
\end{aligned}$$

Pour la fonction $(J/\kappa)\cosh(\kappa x)/\sinh(\kappa L)$, qui n'est qu'une multiplication de la fonction précédente par des constante, nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= J/(\kappa^2 L) \\
\alpha_n &= \frac{2J}{L}\frac{(-1)^n}{\kappa^2+q_n^2}
\end{aligned}$$

C. Recherche de la solution stationnaire.

$$c_s(x) = (J/\kappa)\frac{\cosh(\kappa x)}{\sinh(\kappa L)}$$

Nous avons donc $\partial_t c_s(x) = 0$ bien sûr ; $\partial_{xx} c_s(x) = \kappa^2 c_s(x)$. En remplaçant dans l'équation, nous trouvons

$$0 = (D\kappa^2 - \gamma)c_s(x) = 0$$

par définition de κ.

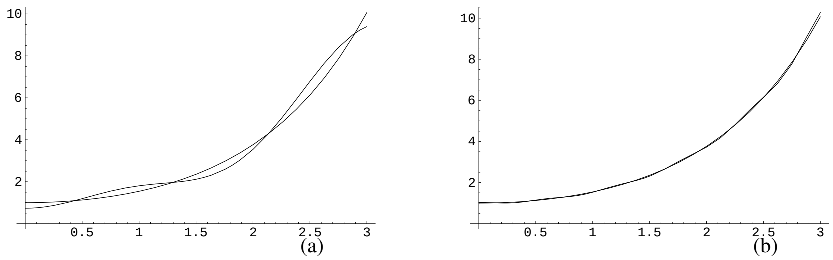

FIG. 1: La fonction $\cosh(x)$ et sa décomposition en série de cosinus, en prenant 4 ou 10 harmoniques.

D. Régularisation des conditions aux limites.

Que ϕ obéissent à la même équation est trivial. Pour les conditions aux bords, nous avons

$$c_s'(x) = J\frac{\sinh(\kappa x)}{\sinh(\kappa x L)}$$

et donc

$$\begin{aligned} \partial_x\phi|_{x=0} &= \partial_x c|_{x=0} - c_s'(0) = 0 \\ \partial_x\phi|_{x=L} &= \partial_x c|_{x=L} - c_s'(L) = J - J = 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\phi(x,0) = c(x,0) - c_s(x) = -c_s(x)$$

E. Résolution.

En décomposant dans la base des cosinus, et en regroupant les termes et utilisant l'orthogonalité des fonctions, nous trouvons

$$\begin{aligned} a_0'(t) + \gamma a_0(t) &= 0 \\ a_n'(t) + (Dq_n^2 + \gamma)a_n(t) &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} a_0 &= A_0 e^{-\gamma t} \\ a_n &= A_n e^{-(Dq_n^2+\gamma)t} \end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficients A_n, nous utilisons la condition initiale $\phi(x,0) = -c_s(x)$ dont nous connaissons justement les coefficients de décomposition sur la base des cosinus. D'où $A_n = -\alpha_n$.

Comme $c = \phi + c_s$, nous avons

$$c(x,t) = \alpha_0(1-e^{-\gamma t}) - + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1-e^{-(Dq_n^2+\gamma)t})\cos(q_n x)$$

L'harmonique la plus lente décroit en $\exp(-\gamma t)$ sur une échelle de temps $1/\gamma$. La longueur du tissu n'a pas d'importance, puisque les molécules ne diffusent pas significativement au dela de $\sim 1/\kappa = \sqrt{D/L}$ mais sont absorbée par les cellules sur le chemin.

II. DIFFRACTION X PAR UN CRISTAL.

A. Questions préliminaires et Notatations.

(a) $\mathrm{TF}_x[\delta(x)] = 1$; (b) $\mathrm{TF}_x[\exp(i\beta x)] = 2\pi\delta(q-\beta)$; (c) $(f * \delta_a)(x) = f(x-a)$.

B. Peigne de Dirac et sa TF.

Une peigne de Dirac est une répétition périodique de distributions δ :

$$\Psi_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-na)$$

2. Pour démontrer que $\delta(\alpha x-\beta) = (1/\alpha)\delta(x-\beta/\alpha)$ il suffit d'appliquer les deux distributions à une fonction quelconque :

$$\int_I \delta(ax-b)f(x)dx = (1/a)\int_I \delta(x-b)f(x/a)dx = (1/a)f(b/a)$$

exactement le résultat que produirait la distribution $(1/a)\delta(x-b/a)$.

3. La TF d'une peigne de Dirac :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_a(q) &= \int_I \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-na)\exp(-iqx)dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_I \delta(x-na)\exp(-iqx)dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-iqna)
\end{aligned}$$

4. Sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$

$$\begin{aligned}
S_\delta(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(2i\pi nx) \\
c_n &= \int_{-1/2}^{+1/2} \delta(x)\exp(-2i\pi nx)dx \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc,

$$S_\delta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2i\pi nx)$$

sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, la fonction $S_\delta(x)$ qui est périodique, de prériode 1, est la répétition de la fonction $\delta(x)$ à intervalle de longueur 1, et donc

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2i\pi nx) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n)$$

En remplaçant $x \to ax/2\pi$, nous trouvons donc

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(inax) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(ax/2\pi - n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-2\pi n/a)$$

D'où le résultat sur la TF d'une peigne de Dirac.

C. TF d'une fonction périodique.

1. la fonction $(f*\delta_a)(x)$ est une translation de $f(x)$ de a. Donc la fonction $F(x) = (f*\Psi_a)(x)$ est simplement la répétition de la fonction $f(x)$ dans l'espace. $F(x)$ représente une fonction $a-$périodique
2. Que vaut $\tilde{F}(q) = \mathrm{TF}[F(x)]$? Nous savons que la TF d'un produit de convolution est le produit des TF. Donc,

$$\tilde{F}(q) = \tilde{f}(q).\tilde{\Psi}_a(q) = (2\pi/a)\tilde{f}(q)\Psi_{2\pi/a}(q)$$

D. TF d'une fonction périodique II.

Nous aurions pu obtenir le résultat précédent directement. Soit une fonction $a-$périodique $F(x)$ et soit $f(x)$ son motif de répétition sur l'intervalle $[0,a]$. Nous pouvons représenter la fonction $F(x)$ sur l'intervalle $[0,a]$ par sa série de Fourier :

$$S_F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(2i\pi nx/a) \tag{4}$$

a. 1. Pourquoi sur l'intervalle $]-\infty,+\infty[$ $F(x) = S_F(x)$? Les deux fonction sont $a-$périodique et coïncide sur l'intervalle $[0,a]$.

b. 2. Démontrer que $c_n = (1/a)\tilde{f}(2\pi n/a)$ où $\tilde{f}(q)$ représente la TF de la fonction $f(x)$.

Nous avons

$$c_n = (1/a)\int_0^a f(x)\exp(-2i\pi nx/a)dx$$

et

$$\tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-iqx)dx = \int_0^a f(x)\exp(-iqx)dx$$

En comparant les deux expressions, la démonstration est évidente.

c. 3. En prenant la TF de l'expression (4) et en utilisant le résultat précédent, démontrer que

$$\tilde{F}(q) = (2\pi/a)\tilde{f}(q)\Psi_{2\pi/a}(q)$$

Nous avons donc

$$S_F(x) = (1/a)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(2\pi n/a)\exp(2i\pi nx/a)$$

En prenant la TF, chaque $\exp(2i\pi nx/a)$ nous fournit un $2\pi\delta(q-2\pi n/a)$, nous avons donc

$$S_F(x) = (2\pi/a)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(2\pi n/a)\delta(q-2\pi n/a)$$

Or, nous savons que $f(q)\delta(q-\alpha) = f(\alpha)\delta(q-\alpha)$ au sens des distributions. Nous pouvons donc écrire

$$S_F(x) = (2\pi/a)\tilde{f}(q)\Psi_{2\pi/a}(q)$$

Après-propos. Mathématiquement, ce que nous voyons apparaître pour la TF d'une fonction périodique est que c'est une peigne de Dirac où l'intensité de chaque pic est modulé par le motif de répétition, où plutôt sa transformée.

Voilà donc le résultat que nous avons obtenu : la diffraction par un cristal (TF d'un motif périodique) nous donne des tâches discretes sur les clichés de diffractions (une peigne de Dirac). La périodicité du cliché de diffraction est fonction seulement de la périodicité du cristal. Par contre, l'intensité de chaque tâche dépend du motif de répétition. Dans la méthode du cristal tournant, on enregistre l'intensité de toutes les tâches en tournant le cristal dans le faisceau X et on remonte ainsi à la carte des densités électronique dans la maille élémentaire. Le seul problème est que nos instruments enregistrent non pas le champ éléctrique diffracté $\mathbf{E}$, mais son intensité $|E|^2$. Ceci s'appelle le problème de la *phase* que vous verrez dans votre cours de cristallographie.

III. LA VARIATION DES CONSTANTES.

La réponse impulsionnelle, comme nous l'avons calculé maintes fois, et $G(t) = H(t)\exp(-i\rho t)$. Nous avons donc, pour la solution générale,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)G(t-\tau)d\tau$$

Or, $G(t-\tau) = 0$ pour $\tau > t$, d'où le résultat énoncé.

En prenant la TF directement, nous aurions obtenus

$$\tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega).1/(i\omega+\rho)$$

En revenant dans l'espace direct, le produit simple se transforme en produit de convolution.