A Orthogonalité des Bessels.

Comme nous l'avons vu dans notre traitement des séries de Fourier, sur l'intervalle $[0, L]$, les fonctions $f_n(x) = \sin(\lambda_n x/L)$ sont orthogonales les unes aux autres où $\lambda_n = n\pi$. De plus, ces fonctions constituent une base sur cet intervalle. Les λ_n sont les zéro de la fonction sin : $\sin(\lambda_n) = 0$.

Les fonctions de bessels J_ν jouent un rôle tout à fait similaire aux fonctions sin. Souvent, dans les problèmes à deux dimensions en coordonnées polaire, ce sont les fonctions de bessel qui sont utilisées comme base orthogonale. Nous allons étudier cela d'un peu plus près.

Nous allons dorénavent supposer l'indice ν fixe, son choix dépend de la symétrie du problème étudié. Soit les $\zeta_{\nu n}$ les zéro successif de la fonction J_ν, c'est à dire $J_\nu(\zeta_{\nu n}) = 0$. Pour les $\zeta_{\nu n}$, nous n'avons pas une formule aussi simple que pour les zéro des sinus, mais nous pouvons les calculer avec autant de précision que nous le souhaitons. Par exemple, les premiers zéro de $J_0(x)$ sont donnés par $\zeta_{0n} = 2.405,\ 5.520,\ 8.654, ...$

0. Nous souhaitons démontrer que les fonctions $g_n(x) = J_\nu(\zeta_{\nu n} x/L)$ sont orthogonales les une aux autres sur l'intervalle $[0, L]$ avec le poids $w(x) = x$:

$$\int_0^L x g_n(x) g_m(x/L) dx = 0$$

Comme nous ne savons pas bien intégrer les fonctions de Bessel, nous allons nous servir de leur équation différentielle pour établir cela.

1. Soit $u_\alpha(x)$ et $u_\beta(x)$ deux fonctions de Bessel, solutions de

$$\begin{aligned} x^2 u''_\alpha + x u'_\alpha + (\alpha^2 x^2 - \nu^2) u_\alpha &= 0 \\ x^2 u''_\beta + x u'_\beta + (\beta^2 x^2 - \nu^2) u_\beta &= 0 \end{aligned}$$

Multipliez la première équation par u_β/x, la deuxième par u_α/x, soustrayez l'une à l'autre et intégrez entre 0 et L. Mettez l'intégrale résultante sous la forme de $I = I_1 + I_2 + I_3 = 0$ où vous auriez groupé tous les termes qui contiennent des dérivées secondes dans I_1 , des dérivées premières dans I_2 et dans I_3 tous les termes restants.

2. En intégrant par parties I_1, montrez que le résultat final pour I se met sous la forme de

$$\left[x\left(u'_\alpha u_\beta - u'_\beta u_\alpha\right)\right]_0^L + (\alpha^2 - \beta^2) \int_0^L x u_\alpha u_\beta dx = 0 \tag{1}$$

3. En posant $\alpha = \zeta_{\nu n}/L$ et $\beta = \zeta_{\nu m}/L$ et que $u_\alpha = J_\nu(\alpha x)$, $u_\beta = J_\nu(\beta x)$, déduisez enfin le résultat escompté en 0.

4. En supposant que les fonctions $J_\nu(\zeta_{\nu n} x/L)$ $(n = 0, 1, ...)$ forment une base (ce qui est vrai mais que nous n'avons pas démontré), comment on écrirait le développement d'une fonction quelconque sur cette base ? Que valent les coefficients de ce développement ? Cette série est très utilisée en physique, au même titre que les Séries de Fourier. Comme pour les Transformées de Fourier, nous pouvons faire tendre $L \to \infty$, auquel cas on parle de transformée de Hankel.

B La seconde solution fondamentale des SL.

Considérons un système Sturm-Liouville que l'on a mis sous forme fondamentale

$$\frac{d}{dx}\left(w\alpha y'\right) + \gamma w y = \lambda w y \tag{2}$$

où la fonction propre $y(x)$ est associée à la valeur propre λ, la fonction $w(x)$ est la fonction poids de l'équation, et $\alpha(x)$ et $\gamma(x)$ sont les coefficients du système. Nous savons que les équations de second ordre doivent avoir *deux* solutions indépendantes. Soit y_1 une solution du système (2).

1. Démontrer alors que la fonction

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2 w\alpha} dx$$

constitue l'autre solution fondamentale. Nous utilisons ici le symbol $\int$ dans le sens "primitive de la fonction".

Help : Démontrer d'abord que

$$w\alpha y_2' = (w\alpha y_1')(y_2/y_1) + 1/y_1$$

et en dérivant une deuxième fois, démontrer que y_2 satisfait l'équation (2).

2. Soit l'équation de Legendre $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$. Soit $y_1(x) = x$ le polynôme de Legendre associée à $n = 1$. Trouver alors l'autre solution fondamentale de l'équation de Legendre associée à la même valeur n. [Help : une décomposition en fraction simple facilitera grandement la chose].

C Klein-Gordon.

L'équation de Schrodinger est une équation non relativiste. La première tentative pour écrire une version relativiste a été donné par Klein et Gordon à la fin des années 1920, qui ont posé le lagrangien suivant pour la fonction d'amplitude $\phi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ dans le vide :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{3} \epsilon_i \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + m^2 \phi^* \phi$$

où m est la masse, les x_i les coordonnées spatio-temporelle ($x_0 = t$), ϕ^*désigne le complexe conjugué de ϕ et $\epsilon_0 = -1$, $\epsilon_{i>0} = 1$. Nous avons posé $c = 1$ et $\hbar = 1$.

1. Obtenez les équations du champ pour ϕ et ϕ^*. Est ce que ces deux équations sont compatibles ? Pour être encore plus lisible, vous pouvez à la fin remplacer les coordonnées x_0, x_1, x_2, x_3 par t, x, y, z.

2. Pouvez-vous établir une analogie entre cette équation et celle de la dynamique relativiste classique $E^2 - p^2 = m^2$? Il faudra vous souvenir des équivalents opératoriels d'energie et d'impulsion en mécanique quantique. Dirac est parti quelques années plus tard des mêmes considérations, mais il a réussi à obtenir des équations de premier degrès pour la fonction d'amplitude.

D Extremum et valeurs propres.

1. Supposons que nous disposons d'un produit scalaire dans l'espace des fonctions réelles que l'on note $(,)$. Par ailleurs, supposons que nous disposons d'un opérateur L hermitien pour ce produit scalaire. A quelle équation doit obéir la fonction f qui minimise la fonctionnelle

$$S[f] = (f, Lf)$$

avec la contrainte $(f, f) = 1$? [Help : Chercher la variation $\delta S = S[f+\epsilon g] - S[f]$ à l'ordre 1 en epsilon et la condition qui rend cette variation nulle quelque soit la fonction g].

2. A partir de la question précédente, pouvez vous donner la forme variationnelle d'un système Sturm-Liouville qui ne contient au plus que des dérivées proemières ?

3. A quelle équation doit obéir f si L n'est pas hermitien ?