Examen de Mathématiques 351.

Université Joseph Fourier, Département de Physique, Licence Physique Recherche.
(Dated: 16 Juin 2009.)

A. FONCTION D'AIRY.

La fonction d'Airy que l'on rencontre souvent dans les problèmes du calcul des bandes de certain semi conducteur est définie par une intégrale :

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i(xt + t^3/3)\right) dt$$

Démontrez que sa Transformée de Fourier est donnée par

$$\tilde{Ai}(k) = e^{ik^3/3}$$

[Help : Il peut être judicieux d'échanger l'ordre d'intégration pour le calcul de la TF].

B. STABILITÉ LINÉAIRE.

1. théorie. Soit l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha y + f(y) \tag{1}$$

où f est une fonction quelconque. Nous supposons que cette équation possède un point stationnaire y_s tel que

$$\alpha y_s = f(y_s)$$

En considérant les perturbations à l'ordre 1, discuter la stabilité de ce point en fonction de la valeur de $f'(y_s)$.

2. Application. Soit les fonction $f(y)$ et αy telles que montrées dans la figure (1). Comme nous pouvons le voir, l'équation différentielle (1) possède dans ce cas trois solutions stationnaires. D'après votre analyse précédente, lesquelles sont stables et lesquels instables ?

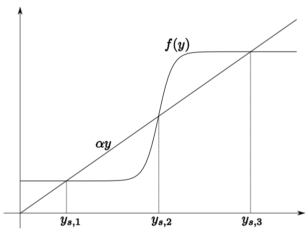

FIG. 1: Exemple de la fonction f, utilisée pour réaliser des mémoires biochimiques.

C. VIBRATION D'UNE POUTRE.

Nous souhaitons étudier certains aspects d'une équation d'onde se propageant dans une poutre :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

où ρ est une constante liée à l'élasticité de courbure de la poutre. La fonction $u(x,t)$ est la flèche en un point x à un instant t. La poutre est supposée infiniment longue. Pour faire notre étude, nous utiliserons l'arsenal des opérateurs linéaires sur des fonctions complexes à notre disposition.

3. Passage du réel au complexe. Désignons par $\phi(x,t)$ la fonction complexe

$$\phi(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} + i\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Nous noterons dorénavant H l'opérateur

$$H = \rho\partial^2/\partial x^2 \tag{2}$$

La fonction ϕ peut donc être écrite comme $\phi = \partial_t u + iHu$. Démontrer que la fonction ϕ obéit à l'équation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - iH\phi = 0$$

Notons que la quantité $\phi\phi^* = (\partial u/\partial t)^2 + \rho^2(\partial^2 u/\partial x^2)^2$ est la densité d'énergie en un point x à un instant t.

Quelques rappels et définitions. Considérons l'ensemble de fonctions complexes de deux variables t, x muni d'un produit scalaire $(.,.)$. Nous supposerons que le produit scalaire est une intégrale sur la variable x :

$$(\phi,\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x,t)\psi(x,t)dx$$

Rappelons que pour les fonctions complexes, étant donné un scalaire a et deux fonctions ϕ et ψ quelconques,

$$\begin{aligned}(a\phi,\psi) &= a^*(\phi,\psi)\\ (\phi,a\psi) &= a(\phi,\psi)\end{aligned}$$

Par ailleurs, un opérateur H est dit hermitien si $(H\phi,\psi) = (\phi,H\psi)\ \forall\phi,\psi$. Etant donné un opérateur quelconque A, sa valeur moyenne sur une fonction ϕ est définie par

$$\langle A\rangle = (\phi, A\phi)$$

Nous supposons dorénavant que les fonctions qui nous intéressent obéissent à une équation d'évolution

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = iH\phi \tag{3}$$

où H est un opérateur hermitien qui ne contient que de dépendance en x.

4. Dérivation. Démontrer, en utilisant la linéarité du produit scalaire que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi,\psi) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t},\psi\right) + \left(\phi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$

5. Evolution. Démontrer que l'évolution de $\langle A \rangle$, où A est un opérateur quelconque n'ayant que de dépendance en x, est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle = i \langle [A, H] \rangle$$

où $[A, H] = AH - HA$.

6. Densité d'énergie. L'énergie totale dans la poutre est donnée par la quantité $E = \langle 1 \rangle$, où 1 est l'opérateur identité. Démontrer que l'énergie est une quantité conservée, c'est à dire $\partial E / \partial t = 0$.

7. Commutateur de X. Soit l'opérateur $P = \partial / \partial x$. Démontrer que

$$[X, P] = -1$$

où X est l'opérateur de multiplication par x : $X\phi = x\phi$. En déduire que

$$[X, P^2] = -2P$$

Il n'est pas difficile de voir que l'opérateur H défini en (2) vaut $H = \rho P^2$.

8. Barycentre de l'énergie. le barycentre de l'énergie est donnée par $\langle X \rangle$. Démontrer que si la fonction ϕ est paire, c'est à dire $\phi(x, t) = \phi(-x, t)$, alors

$$\frac{\partial \langle X \rangle}{\partial t} = 0$$

[Help : Si une fonction est paire, quelle est la nature de sa dérivée ? Que peut ont dire de l'intégrale des fonctions paires et impaires ?]

9. Evolution. Nous savons que la solution de l'équation (3) est donnée, operatoriellement, par

$$\phi(x, t) = e^{itH} \phi(x, 0)$$

En développant l'opérateur exponentiel, démontrer que si la fonction $\phi(x, 0)$ (la condition initiale) est paire, alors la fonction aux temps ultérieurs $\phi(x, t)$ reste toujours paire.

Postface. Nous allons nous arrêter là. Mais si nous voulions continuer, nous aurions développé une relation entre la vitesse du barycentre est la *chiralité* de la fonction définie par $\int_I \phi^* \phi' dx$; nous aurions également étudié l'élargissement de l'onde, donné par $\langle X^2 \rangle$. Il aurait été utile également de considérer une poutre finie et voire comment on prend en compte les conditions aux bords. Mais cela suffit pour cet examen, le but était de vous montrer que les outils que vous utilisez en mécanique quantique ont un caractère très général et qu'il n'y a pas à mystifier une équation complexe, c'est simplement un outil mathématique.