Examen de Mathématiques 351.

Université Joseph Fourier, Département de Physique, Licence Physique Recherche.
(Dated: 16 Juin 2009.)

A. FONCTION D'AIRY.

La fonction d'Airy que l'on rencontre souvent dans les problèmes du calcul des bandes de certain semi conducteur est définie par une intégrale :

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i(xt + t^3/3)\right) dt$$

Démontrez que sa Transformée de Fourier est donnée par

$$\tilde{Ai}(k) = e^{ik^3/3}$$

Nous désignerons par la suite $I = [-\infty, \infty]$. En calculant explicitement la TF, nous avons ,

$$\begin{aligned} 2\pi\tilde{Ai}(k) &= 2\pi\int_I Ai(x)e^{-ikx}dx \\ &= \int_I dx \int_I dt \exp\left(i(x(t-k) + t^3/3)\right) \\ &= \int_I dt \int_I dx \exp\left(i(x(t-k) + t^3/3)\right) \\ &= \int_I dt \exp(it^3/3) \int_I dx \exp\left(i(x(t-k)\right) \end{aligned}$$

Ici, on reconnait que la deuxième intégrale vaut un delta de Dirac :

$$\int_I dx \exp\left(i(x(t-k)\right) = 2\pi\delta(t-k)$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \tilde{Ai}(k) &= \int_I \exp(it^3/3)\delta(t-k)dt \\ &= \exp\left(i(k^3/3)\right) \end{aligned}$$

B. STABILITÉ LINÉAIRE.

2. théorie.

Soit l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha y + f(y) \tag{1}$$

où f est une fonction quelconque. Nous supposons que cette équation possède un point stationnaire y_s tel que

$$\alpha y_s = f(y_s)$$

Autour de y_s, nous pouvons écrire à l'ordre 1, $y = y_s + \epsilon y_1$.Dans ce cas, nous avons

$$f(y) = f(y_s) + f'(y_s)\epsilon y_1 + O(\epsilon^2)$$

En remplaçant dans l'équation (1), nous avons à l'ordre 1 (l'ordre zéro s'annule automatiquement)

$$\frac{dy_1}{dt} = \left(-\alpha + f'(y_s)\right) y_1$$

Le système est stable si le terme entre parenthèse est négatif, c'est à dire

$$f'(y_s) < \alpha \tag{2}$$

2. Application.

Nous voyons que le point stattionnaire du milieu ne respecte pas la condition (2) et n'est donc pas stable, contrairement aux deux autres.

C. VIBRATION D'UNE POUTRE.

Nous souhaitons étudier certains aspects d'une équation d'onde se propageant dans une poutre :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \tag{3}$$

où ρ est une constante liée à l'élasticité de courbure de la poutre. La fonction $u(x,t)$ est la flèche en un point x à un instant t. La poutre est supposée infiniment longue. Pour faire notre étude, nous utiliserons l'arsenal des opérateurs linéaires sur des fonctions complexes à notre disposition.

1. Passage du réel au complexe. Désignons par $\phi(x,t)$ la fonction complexe

$$\phi(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} + i\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

et

$$H = \rho\partial^2/\partial x^2 \tag{5}$$

La fonction ϕ peut donc être écrite comme

$$\phi = \partial_t u + iHu \tag{6}$$

en dérivant par rapport au temps ou deux fois l'espace l'"équation (6) (H et ∂_t commutent), nous avons

$$\begin{aligned} \partial_t\phi &= \partial_t^2 u + iH\partial_t u \\ H\phi &= H\partial_t u + iH^2 u \end{aligned}$$

et donc

$$\partial_t\phi - iH\phi = \partial_t^2 u + H^2 u = 0$$

Une autre façon de voir cela est de remarquer que l'équation (3) peut s'écrire comme

$$(\partial_t^2 + H^2)u = 0$$

ou encore

$$(\partial_t - iH)(\partial_t + iH)u = 0$$

En posant $\phi = (\partial_t + iH)u$, nous avons automatiquement l'équation demandée.

2. Dérivation. Démontrer, en utilisant la linéarité du produit scalaire que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi, \psi) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \psi\right) + \left(\phi, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$

trivial.

3. Evolution. Démontrer que l'évolution de $\langle A\rangle$ est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle A\rangle = i\,\langle [A, H]\rangle$$

où $[A, H] = AH - HA$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\langle A\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}(\phi, A\phi) \\
&= (\partial_t\phi, A\phi) + (\phi, A\partial_t\phi) \\
&= (iH\phi, A\phi) + (\phi, iAH\phi) \\
&= -i(\phi, HA\phi) + i(\phi, AH\phi) \\
&= i(\phi, [A, H]\phi)
\end{aligned}$$

4. Densité d'énergie. L'énergie totale dans la poutre est donnée par la quantité $E = \langle 1\rangle$, où 1 est l'opérateur identité. Démontrer que l'énergie est une quantité conservée, c'est à dire $\partial E/\partial t = 0$.

L'opérateur 1 et H commuttent, donc $[1, H] = 0$.

5. Commutateur de X. Démontrer que

$$[X, P] = -1$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
[X, P]\phi &= x\phi' - (x\phi)' \\
&= -\phi
\end{aligned}$$

En déduire que

$$[X, P^2] = -2P$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
[X, P^2] &= XPP - PPX \\
&= (PX - 1)P - PPX \\
&= P[X, P] - P \\
&= -2P
\end{aligned}$$

6. Centre de l'énergie. le barycentre de l'énergie est donnée par $\langle X\rangle$. Démontrer que si la fonction ϕ est paire, c'est à dire $\phi(x, t) = \phi(-x, t)$, alors

$$\frac{\partial\langle X\rangle}{\partial t} = 0$$

Nous avons, d'après ce qu'on a fait,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\langle X\rangle}{\partial t} &= i[X, H] \\
&= -2i\rho\,\langle P\rangle \\
&= -2i\rho\int_I \phi^*\phi' dx
\end{aligned}$$

Si la fonction ϕ est paire, ϕ^* est également paire , tandis que ϕ' est impaire ; le produit d'une fonction paire et impaire est impaire, et l'intégrale d'une d'une fonction impaire sur un intervalle symetrique est nulle [Note pour ceux qui veulent aller plus loin : A vrai dire, on appelle cela convergence au sens des valeurs principales ; On devrait prendre quelques précaution dans le cas général ; cependant, comme nos fonctions sont supposées L^2, on peut assimiler les deux convergences].

7. Evolution. Nous savons que la solution de l'équation (**??**) est donnée, operatoriellement, par

$$\phi(x, t) = e^{itH}\phi(x, 0)$$

En Développant, nous avons

$$\phi(x, t) = \left(1 + itH - t^2H^2/2 + ...\right)\phi(x, 0)$$

Or, H n'est qu'un opérateur de dérivation seconde : si ϕ est paire, ϕ'' est également paire. De même, toute les puissance de H implique des dérivations paires. Nous déduisons qui si la fonction ϕ est paire au temps $t = 0$, elle le restera. On en déduit que si ϕ est paire au temps $t = 0$, le barycentre de l'énergie ne bouge pas. Notez que ϕ paire n'impose en rien u paire.