# Examen de Mathématiques 362.

Université Joseph Fourier, Département de Physique, Licence Physique Recherche.

(Dated: 27 Mai 2009)

## A. POTENTIEL TRIANGULAIRE.

Nous souhaitons résoudre l'équation

$$f''(x) + xf(x) = 0 \tag{1}$$

Dans le domaine $x \geq 0$. Nous rencontrons cette équation pour les particules quantiques dans le champ de gravitation[1] ou proche d'une interface dans les transistors MOSFET. La solution de cette équation est connue comme la fonction d'Airy $Ai(-x)$, mais nous souhaitons la donner sous la forme des fonctions spéciales connues. Nous sommes ici en présence d'une équation de type Sturm-Liouville. L'approche classique consiste à transformer cette équation en une équation qui nous est plus connue en posant

$$\begin{aligned} x &= y^\alpha \\ f(x) &= y^\beta g(y) \end{aligned}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes ( à choisir plus tard) et chercher une équation plus connue pour la fonction $g$.

*1. Transformation.* En suivant cette démarche, démontrer que $g(y)$ obéit à

$$y^2 g'' + (1 + 2\beta - \alpha)yg' + \left[\alpha^2 y^{3\alpha} + \beta(\beta - \alpha)\right] g = 0 \tag{2}$$

*2. Résolution.* Cela commence furieusement à prendre des allures d'équation de Bessel. Choisissez les coefficients $\alpha$ et $\beta$ convenablement pour que cela deviennent effectivement une équation de Bessel, la résoudre et en déduire la solution de l'équation (1) :

$$f(x) = \sqrt{x}\left(A\, J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) + B\, J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right)$$

où $A$ et $B$ sont deux constantes dépendant des conditions initiales. En l'occurrence, pour la fonction d'Airy, le choix est $A = B = 1/3$, mais cela dépassera le cadre de notre examen.

## B. EQUATION DU MOUVEMENT D'UNE PARTICULE.

L'espace physique possède quatre dimensions, ses points sont repérés par quatre coordonnées $P = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. Une courbe dans l'espace peut être décrite de façon paramétrique $(x_0(\zeta), x_1(\zeta), x_2(\zeta), x_3(\zeta))$ où $\zeta$ est un paramètre réel quelconque dans un intervalle $[a, b]$. Le vecteur tangent à la courbe en un point est donnée par les dérivées par rapport à $\zeta$ : $(\dot{x}_0(\zeta), \dot{x}_1(\zeta), \dot{x}_2(\zeta), \dot{x}_3(\zeta))$. La "distance" infinitésimal entre deux points voisins est donnée par $ds = \sqrt{\sum_{i=0}^{3} \epsilon_i dx_i^2}$ où $\epsilon_0 = 1$ et $\epsilon_{i>0} = -1$. Un géodésique est une courbe qui rend la distance entre deux points donnée $P_1, P_2$ extremum :

$$\mathcal{S} = -\int_{P_1}^{P_2} m ds$$

où $m$ est un scalaire appelé masse. L'intégrand est le Lagrangien $\mathcal{L}$ de notre problème.

En physique classique[2], on distingue souvent la première coordonnée qu'on appelle temps $t$ et les trois autres, que l'on groupe au sein d'un 3-vecteur $\mathbf{x}$ : $P = (t, \mathbf{x})$. Cela introduit inutilement une asymétrie dans les expressions et oblige à des acrobaties, mais c'est une tradition culturelle établie que nous allons suivre ici. Si nous utilisons la première coordonnée $x_0 \equiv t$ comme le paramètre décrivant la courbe, le vecteur tangent est $(1, \mathbf{v})$, où $\mathbf{v}$ est la (3-vecteur) vitesse habituelle $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$. Nous utilisons le symbole $v_i$ pour $\dot{x}_i$ à fin d'alléger un peu l'écriture. L'action s'écrit alors

$$\mathcal{S} = -\int_{t_1}^{t_2} m\sqrt{1 - v^2} dt$$

où $v^2 = \sum_{i=1}^{3} v_i^2$. Dorénavant, pour alléger les notations, nous suivrons la règle de la sommation des indices répétés : $v^2 = v_i v_i$. [Note : Si la sommation de l'indice répété vous pose problème, vous pouvez écrire les expressions explicitement, du genre $v^2 = v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3$, cela pourra enlever des ambiguïtés au moment des dérivations].

*1. Impulsion.* (a) Donner l'expression des impulsions $p_i = \partial\mathcal{L}/\dot{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Pour plus de lisibilité, vous pouvez utiliser le facteur de Lorentz

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$$

*2. Droite :* En utilisant les équations d'Euler-Lagrange, montrer qu'un géodésique est une droite.

*Champs E.M.*

L'espace est remplit d'un champ qu' à nouveau, une mauvaise habitude sépare en un scalaire $\phi$ (potentiel) et un 3-vecteur $\mathbf{A}$ (potentiel vecteur). En présence du champ, l'action s'écrit

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{-m\sqrt{1 - v^2} - q\phi + q\mathbf{A}.\mathbf{v}\right\} dt$$

$\phi$ et $\mathbf{A}$ sont bien sûr fonction des coordonnées $t$ et $x_i$ ; $q$ est un scalaire appelé "charge" et contrôle le couplage de la particule au champ.

*3. Impulsion avec champ.* Donner l'expression de l'impulsion $P_i = \partial\mathcal{L}/\dot{x}_i$. Ecrire cette expression sous la forme de $P_i = p_i + f_i$, où $p_i$ est l'impulsion de la particule sans champs obtenue en (B 0 1). Montrer que sous forme vectorielle, cette relation s'écrit $\mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}$ .

*4. Euler Lagrange.* Le long de la courbe, le différentiel total d'une quantité scalaire s'écrit

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{x_j} v_j$$

En utilisant cette expression et les équations d'Euler-Lagrange, démontrer que

$$\frac{dp_i}{dt} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - q\frac{\partial A_i}{\partial t} + q\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right) v_j$$

L'expression ci-dessus est souvent écrite sous forme vectorielle comme

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

où $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont appelé champs électrique et magnétique (voir le devoir sur le champ EM).

Ce problème aurait été beaucoup plus élégamment formulé si nous n'avions pas distingué inutilement entre les coordonnées et tout traité en tant que 4-vecteur. Les étudiants intéressés se rapporterons à un livre avancé sur la relativité restreinte, comme celui de W. Pauli.

## C. INTÉGRALE DE FONCTION OSCILLANTE.

Nous sommes habitués à l'intégrale gaussienne

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4t}}$$

On rencontre souvent sa version oscillante dans des problèmes d'optique ou de mécanique quantique :

$$\begin{aligned} F_c &= \int_0^\infty \cos(tx^2) dx \\ F_s &= \int_0^\infty \sin(tx^2) dx \end{aligned}$$

ces intégrales sont les limites d'une fonction appelée "Fresnel".

*1. Existence.* Indiquez sans trop de démonstration pourquoi ces intégrales existent.

*2. Contour fermé.* Que vaut

$$I = \oint_C e^{itz^2} dz$$

où $C$ est l'arc fermé de rayon $R$ et d'angle $\pi/4$ de la figure (1) ?

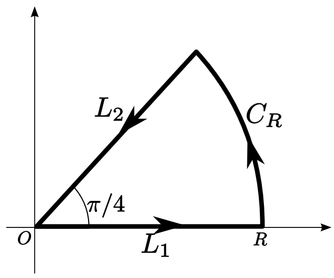


FIG. 1: Contour fermé $C = L_1 + C_R + L_2$

*3. Arc.* Démontrer que quand $R \to \infty$,

$$\int_{C_R} e^{itz^2} dz \to 0$$

(nous supposons $t > 0$) [Help : Nous avons besoin de borner correctement $\left|\int_{C_R}\right|$ ; Par ailleurs, sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, nous savons que $\sin(u) \geq (2/\pi)u$ ]

*4. $L_2$.* Que vaut

$$\int_{L_2} e^{itz^2} dz$$

Quand $R \to \infty$ ?

*5. Synthèse.* En synthétisant l'ensemble des résultats précédents, déduire l'intégrale sur $L_1$ quand $R \to \infty$ et les valeurs de $F_c$ et $F_s$.

---

[1] Une expérience d'étude des neutrons froids dans le champ de gravitation terrestre se déroule depuis quelques années dans le coeur du réacteur de l'Institut Laue Langevin à Grenoble, pour ceux qui auront la chance de la visiter lors d'un stage par exemple.

[2] Le temps $t$ est mesuré ici dans les mêmes unités que les autres coordonnées, autrement dit $c = 1$.