Examen de Math

28 mai 2009

1 Potentiel Triangulaire.

Nous souhaitons résoudre l'équation

$$f''(x) + xf(x) = 0 \tag{1}$$

Posons

$$\begin{aligned} x &= y^\alpha & (2)\\ f(x) &= y^\beta g(y) & (3)\end{aligned}$$

où α et β sont des constantes (à choisir plus tard) et chercher une équation plus connue pour la fonction g.

A. Nous devons effectuer correctement les dérivation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &= \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy} \\ &= \frac{1}{\alpha}y^{1-\alpha}\frac{d}{dy}\end{aligned}$$

Nous avons donc, par simple remplacement,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}f(x) \\ &= \frac{1}{\alpha}y^{1-\alpha}\frac{d}{dy}\left(y^\beta g(y)\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}y^{1+\beta-\alpha}g'(y) + \frac{\beta}{\alpha}y^{\beta-\alpha}g(y)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}f'(x) \\ &= \frac{1}{\alpha}y^{1-\alpha}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\alpha}y^{1+\beta-\alpha}g'(y) + \frac{\beta}{\alpha}y^{\beta-\alpha}g(y)\right) \\ &= \frac{1}{\alpha^2}\left(y^{2+\beta-2\alpha}g''(y) + (1+2\beta-\alpha)y^{1+\beta-2\alpha} + \beta(\beta-\alpha)y^{\beta-2\alpha}\right)\end{aligned}$$

Le deuxième terme nous donne

$$xf(x) = y^{\beta+\alpha}g(y)$$

En remplaçant dans l'équation (1), en divisant par $y^{\beta-2\alpha}$ et en multipliant par α^2, nous obtenons donc

$$y^2g'' + (1+2\beta-\alpha)yg' + \left[\alpha^2y^{3\alpha} + \beta(\beta-\alpha)\right]g = 0 \tag{4}$$

B. Pour que cela commence à ressembler à l'équation de Bessel

$$y^2g'' + yg' + (\alpha^2y^2 - m^2)g = 0$$

dont les solutions sont les fonctions $J_{\pm m}(\alpha y)$, nous devons choisir

$$\begin{aligned} \alpha &= 2/3 \\ \beta &= 1/3 \end{aligned}$$

qui transforme alors l'éq.(4) en

$$y^2g'' + yg' + ((2/3)^2y^2 - 1/9)g = 0$$

et donc

$$g(y) = AJ_{1/3}((2/3)y) + BJ_{-1/3}((2/3)y)$$

En utilisant la relation (3), nous avons

$$f(x) = x^{\beta/\alpha}g((2/3)x^{1/\alpha})$$

nous avons ce que nous cherchons.

2 Equation du mouvement d'une particule.

Impulsion, géodésique.

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} \\ &= m\gamma\dot{x}_i \end{aligned}$$

Comme les coordonnées x_i n'apparaissent pas directement dans le lagrangien, nous avons $dp_i/dt = 0$ ou encore $\gamma\dot{x}_i = C_i$ où les C_i sont des consante. En prenant par exemple x_1 comme référence et en divisant les autres équations par l'équation sur x_1, nous trouvons

$$\begin{aligned} dx_2/dx_1 &= A \\ dx_3/dx_1 &= B \end{aligned}$$

où A et B sont deux autres constantes. Cela est manifestement l'équation d'une droite.

Impulsion généralisé. En présence du champs, le Lagrangien est

$$\mathcal{L} = m\sqrt{1 - v_i v_i} - q\phi + qA_i v_i$$

d'où

$$P_i = m\gamma v_i + qA_i$$

la première partie est bien l'impulsion sans champs. Sous forme vectoriel, nous avons

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}$$

remarquons tout de suite que

$$\begin{aligned} \frac{dP_i}{dt} &= \frac{dp_i}{dt} + q\frac{dA_i}{dt} \\ &= \frac{dp_i}{dt} + q\frac{\partial A_i}{\partial t} + q\frac{\partial A_i}{\partial x_j}v_j \end{aligned} \tag{5}$$

Par ailleurs, nous avons, pour les dérivées par rapports aux coordonnées

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}v_j \tag{6}$$

Les équations d'Euler Lagrange nous exigent l'égalité entre les deux équations (5,6), ce qui nous donne la relation demandée. Si la sommation de l'indice répété vous est non familier, prenons l'expression explicite pour $\partial\mathcal{L}/\partial x_1$:

$$\mathcal{L} = ... + A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3$$

donc, à la charge q près,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= ... + \frac{\partial A_1}{\partial x_1}v_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_1}v_2 + \frac{\partial A_3}{\partial x_1}v_3 \\ &= ... + \frac{\partial A_j}{\partial x_1}v_j \end{aligned}$$

3 Intégrale de fonction oscillante.

A. Un changment de variable $y = x^2$, $dx = (1/2\sqrt{y})dy$ nous transforme par exemple la première intégrale en

$$F_c = \int_0^\infty \frac{\cos(ty)}{2\sqrt{y}}dy$$

La convergence en 0 ne pose pas de problème, puisquel'intégrale des fonctions en y^n, $n > -1$ converge en 0. Quand $y \to \infty$, L'intégrale converge à nouveau à cause de la partie oscillante $\cos(ty)$ (bien sûr, nous n'avons pas de convergence absolue).

B. La fonction $\exp(itz^2)$ n'a pas de pôle (elle est entière, analytique dans tous le plan $\mathbb{C}$), donc pas de pôle non plus à l'intérieur du contour C. L'intégrale vaut donc 0.

C. Posons $z = R\exp(i\theta)$ sur l'arc mentionné. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} e^{itz^2} dz\right| &= \left|\int_0^{\pi/4} \exp\left(itR^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)\right) iRd\theta e^{i\theta}\right| \\
&< R\left|\int_0^{\pi/4} \exp\left(-tR^2\sin(2\theta)\right) d\theta\right| \\
&< R\int_0^{\pi/4} \exp\left(-4tR^2\theta/\pi\right) d\theta \\
&= \frac{R}{4tR^2}\left(1 - e^{-tR^2}\right)
\end{aligned}$$

qui tend manifestement vers 0 quand $R \to \infty$.

D. Pour la partie L_2, posons $z = e^{i\pi/4}\zeta$ et donc $z^2 = i\zeta^2$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_{L_2} e^{itz^2} dz &= e^{i\pi/4}\int_R^0 e^{-t\zeta^2} d\zeta \\
&= -(1+i)/\sqrt{2}\int_0^R e^{-t\zeta^2} d\zeta
\end{aligned}$$

Quand $R \to \infty$, l'intégrale de la gaussienne tend vers $\sqrt{\pi/4t}$. Nous avons donc

$$\int_0^{\infty} e^{itx^2} dx = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{8t}}$$

En écrivant $\exp(itx^2)$ comme la somme de ses parties réelles et imaginaire, nous avons donc

$$F_c = F_s = \sqrt{\frac{\pi}{8t}}$$