Examens de Mathématiques.

Université Joseph Fourier, Département de Physique, Licence Physique Recherche
(Dated: 6 janvier 2009)

A. OSCILLATEUR BIOLOGIQUE.

Introduction.

Les organismes vivants possèdent des "horloges internes" qui sont, au niveau cellulaire, des oscillateurs chimiques auto-entretenu. Un des schémas les plus simples et les plus robustes de ces oscillations est donné par l'interaction entre deux gènes, qu'on appelera A et B, où le premier active le second tandis que le second inhibe le premier. Désignant par $A(t)$ et $B(t)$ la concentration des produits de ces gènes au temps t, nous pouvons écrire l'équation d'une telle interaction par

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{1+B} - \gamma_1 A \qquad (1)$$
$$\frac{dB}{dt} = \frac{A}{k+A} - \gamma_2 B \qquad (2)$$

Les unités de A, B, et t ont été choisi de façon à ce que la plupart des paramètres de l'équation soient égale à 1. Les trois paramètres restants, le seuil d'activation k et les taux de dégradation γ_1, γ_2 sont tous positifs.

Il n'est pas difficile de montrer ques les équations ci-dessus possèdent une solution stationnaire que l'on notera A_s et B_s ; nous n'avons pas besoin de les calculer explicitement. Nous souhaitons étudier la stabilité linéaire de cette solution stationnaire. Nous chercherons la solution perturbative de ces équations pour une conditions initiale proche de la solution stationnaire ($A(0) = A_s + \varepsilon$, $B(0) = B_s + \alpha\varepsilon$) sous la forme de

$$A(t) = A_s + \varepsilon A_1(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$B(t) = B_s + \varepsilon B_1(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

où le paramètre ε est supposé "petit".

1. Pertubation à l'ordre 1. Obtenez les équations gouvernant A_1 et B_1 sous la forme de

$$\frac{dA_1}{dt} = a_{11}A_1 + a_{12}B_1 \qquad (3)$$
$$\frac{dB_1}{dt} = a_{21}A_1 + a_{22}B_1 \qquad (4)$$

où vous expliciterez les constantes a_{ij} en fonction k,γ_1, γ_2, A_s et B_s.

2. Stabilité linéaire. Démontrez, sans les calculer explicitement, que les valeurs propres de la matrice associée, données par l'équation

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

sont forcément négatives. Déduire la nature de la stabilité de la solution stationnaire. [**Help :** il suffit de se souvenir de la relation entre la somme et le produit des racines d'une équation de second degrés et les coefficients de celle ci.]

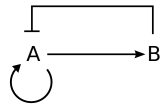

FIG. 1: Comment les biologistes représentent ce genre de *circuit* génétique. Les flèchent représentent une activation positive, les "stop" une inhibition. L'ingrédient essentiel pour obtenir une oscillation est l'auto-activation du gène A, symbolisé par l'arc.

3. Perte de stabilité. Comme vous pouvez le constater, le schéma donné par les équations (1,2) est insuffisant pour créer une oscillation. Il faut y ajouter un ingrédient essentiel qui est l'auto-activation du gène A par lui même. Pour cela, il faut ajouter un terme en

$$A/(k' + k''A)$$

à droite de l'équation (1). Trouver comment l'ajout de ce terme modifie le coefficient a_{11} calculé en (3). Notez ce terme supplémentaire U, et discutez pourquoi l'apparition de ce terme peut faire perdre sa stabilité à la solution stationnaire. [Une discussion qualitative suffira, le calcul exact est trop long pour être fait ici]. Le régime oscillatoire apparaît dans ce cas, mais son calcul est au-delà du champ de cet examen.

B. MANIPULATION DES TL.

1. Exponentiel pondéré. Soit la fonction

$$f(t) = (e^{-bt} - e^{-at})/t$$

où $a, b > 0$. En utilisant les règles de manipulation des transformées de Laplace, trouvez son image. Nous rappelons, si cela peut être utile, que

$$\int_0^\infty f(t)dt = \log(a/b)$$

[**Help**. Evidément, cette forme de $f(t)$ est trop compliquée pour être calculée directement. Soit $\hat{f}(s)$ la TL de $f(t)$. Quelle opération peut on effectuez sur $f(t)$ pour que sa forme soit simple pour les TL ? Et dans ce cas, quel sera l'effet sur $\hat{f}(s)$?]

2. Existence. Pouvez vous dire pourquoi on ne calcule pas directement la TL de la fonction $g(t) = e^{-at}/t$? Tracez les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, cela peut vous aider.

3. Extension. Calculez la TL de la fonction

$$h(t) = (e^{-bt} - e^{-at})/t^{3/2}$$

Sachant que

$$\int_0^\infty h(t)dt = 2\sqrt{\pi}(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

Le calcul ne doit pas être beaucoup plus compliqué que la question précédente.

C. SUPERSYMETRIE.

Nous souhaitons calculer les valeurs et fonctions propres de l'opérateur

$$H_{sec} = -d^2/dx^2 + 2/\cos^2 x$$

Pour cela, nous allons construire un opérateur jumeau dont le calcul des valeurs et fonctions propres sont plus simple, et ensuite revenir à notre objectif initial.

Définition. Soit l'opréateur générique

$$H_1 = -d^2/dx^2 + V_1(x)$$

où $V_1(x) \geq V_{min} \in \mathbb{R}$ (c'est à dire que la fonction $V_1(x)$ possède une borne inférieure). Rappleons que cet opérateur transforme la fonction $f \in \mathscr{L}_2$ en

$$H_1.f(x) = -f''(x) + V_1(x)f(x) \tag{5}$$

1. Opérateurs d'échange. Démontrer que

$$[d/dx, W(x)] = W'(x)$$

où d/dx est l'opérateur de dérivation, $W(x)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $W(x)$, $[,]$ désigne le commutateur, et l'égalité est dans l'espace des opérateurs. [Help : nous avions vu en cours le cas particulier $W(x) = x$; appliquer le commutateur à une fonction quelconque f et étudier le résultat]

Soit maintenant la fonction $W(x)$ tel que

$$-W'(x) + W^2(x) = V_1(x)$$

Démontrer alors que l'opérateur H_1 se met sous la forme

$$H_1 = A^\dagger A$$

où

$$\begin{aligned} A^\dagger &= -d/dx + W(x) \\ A &= d/dx + W(x) \end{aligned}$$

2. Jumeaux. Soit l'opérateur $H_2 = AA^\dagger$. Montrer que cet opérateur se met sous la forme

$$H_2 = -d^2/dx^2 + V_2(x)$$

où vous préciserz la forme de $V_2(x)$. V_1 et V_2 sont appelés des potentiels jumeaux.

3. Valeurs et fonctions propres. Démontrer que si $\psi_n(x)$ est une fonction propre de H_1 associée à la valeur propre λ_n, c'est à dire $H_1\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n(x)$, alors la fonction $\phi_n(x) = A\psi_n(x)$ est une fonction propre de l'opérateur H_2 associée à la même valeur propre. [Help : il suffit juste de se souvenir des définitions de H_1et H_2 en terme de A et $A^\dagger$.]

De même, démontrer que si $\phi_n(x)$ est fonction propre de H_2, c'est à dire $H_2\phi_n(x) = \mu_n\phi_n(x)$, alors $\psi_n(x) = A^\dagger\phi_n(x)$ est fonction propre de H_1 avec la même valeur propre.

Vous voyez ici apparaître un résultat très important : si nous connaissons les valeurs propres et fonctions propre d'un opérateur, nous connaissons immédiatement les valeurs et fonctions propres de son opérateur jumeau.

4. Construction de W. Soit $\psi_0(x)$ la fonction propre fondamentale de H_1, c'est à dire celle qui est associée à la plus petite valeur propre λ_0 ; sans perte de généralité, nous supposons que $\lambda_0 = 0$. Nous allons considérer cette fonction parce que nous savons (on ne démontrera pas cela ici) que $\psi_0(x) \neq 0 \forall x$, et cela nous facilite un peu la tâche par la suite de cette question. Demontrer que nous pouvons écrire $W(x)$sous la forme de

$$W(x) = -\psi_0'(x)/\psi_0(x)$$

5. Application : puits de potentiel infini. Soit maintenant l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ et le potentiel $V_1(x) = -1$; nous allons nous limiter aux fonctions $\mathscr{L}_2$ sur cet intervalle qui s'annulent sur les bords (en mécanique quantique, on parle d'un puits de potentiel infiniment profond). Vérifier que les fonctions

$$\psi_n(x) = \cos(2n+1)x$$

sont bien des fonctions propres de l'opérateur H_1 ; Quelles sont les valeurs propres λ_n associées à ces fonctions ?

6. Potentiel jumeau. Obtenir explicitement le potentiel $V_2(x)$, jumeau du potentiel $V_1(x) = -1$. En déduire les fonctions et valeurs propres de l'opérateur H_2.

7. Shift et conclusion. Soit $a \in \mathbb{R}$ et H un opérateur quelconque. Démontrer que si $f(x)$ est une fonction propre de H avec la valeur propre λ, alors elle est également une fonction propre de l'opérateur $H + a$, mais avec la valeur propre $\lambda + a$. En déduire les fonctions et valeurs propres de l'opérateur H_{sec}, notre objectif initial.

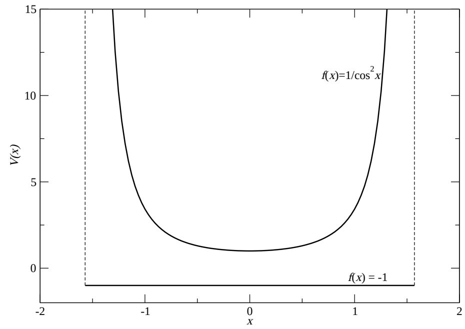

FIG. 2: Les fonctions $\sec^2 x$ et -1