Examens de Mathématiques.

Université Joseph Fourier, Département de Physique, Licence Physique Recherche
(Dated: 6 janvier 2009)

I. OSCILLATEUR BIOLOGIQUE.

a. Pertubation à l'ordre 1. Obtenez les équations gouvernant A_1 et B_1 sous la forme de

$$\frac{dA_1}{dt} = a_{11}A_1 + a_{12}B_1 \quad (1)$$
$$\frac{dB_1}{dt} = a_{21}A_1 + a_{22}B_1 \quad (2)$$

Il n'est pas difficile, en faisant des développements limités élémentaire, de démontrer que

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\gamma_1 \\ a_{12} &= -1/(1+B_s)^2 \\ a_{21} &= \frac{1}{k+A_s}\left(1-\frac{A_s}{k+A_s}\right) = \frac{k}{(k+A_s)^2} \\ a_{22} &= -\gamma_2 \end{aligned}$$

Certaines personnes, n'aimant pas trop le developpement de la fonction $1/1+x$, m'ont donné la forme alternative

$$\begin{aligned} a_{12} &= -\frac{\gamma_1 A_s}{1+B_s} \\ a_{21} &= \frac{1-\gamma_2 B_s}{k+A_s} \end{aligned}$$

qui est correcte. Pour voir l'équivalence, il suffit de noter que

$$\begin{aligned} \gamma_1 A_s &= \frac{1}{1+B_s} \\ \gamma_2 B_s &= \frac{A_s}{k+A_s} \end{aligned}$$

b. Stabilité linéaire. Démontrez, sans les calculer explicitement, que les valeurs propres de la matrice associée, données par l'équation

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

sont forcément négatives. Déduire la nature de la stabilité de la solution stationnaire.

Soit λ_1,λ_2 les deux valeurs propres. Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_2 &= a_{11}+a_{22} = -\gamma_1-\gamma_2 \\ \lambda_1\lambda_2 &= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} = \gamma_1\gamma_2 + \frac{1}{(1+B_s)^2}\frac{k}{(k+A_s)^2} \end{aligned}$$

Il est évident que $\lambda_1+\lambda_2 < 0$. Par ailleurs, comme $k > 0$ on déduit que $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Ceci nous induit

$$Re(\lambda_i) < 0$$

La solution des équations (1,2) est de la forme $C_1\exp(\lambda_1 t) + C_2\exp(\lambda_2 t)$, donc $A_1, B_1 \to 0$ quand $t \to +\infty$, et le point stattionnaire est stable.

c. Perte de stabilité. Il nous faut également développer $A/k' + k''A$ à l'ordre 1 en ε, ce qui est très similaire à ce que nous avions fait pour le calcul de a_{21}. Nous trouvons que maintenant,

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\gamma_1 + \frac{1}{k'+k''A_s}\left(1-\frac{k''A_s}{k'+k''A_s}\right) = -\gamma_1 + \frac{k'}{(k'+k''A_s)^2} \\ &= -\gamma_1 + U \end{aligned}$$

Nous avons écrit le terme supplémentaire sous forme de U. Nous voyons maintenant que

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 &= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \\ &= \gamma_1\gamma_2 + \frac{1}{(1+B_s)^2}\frac{k}{(k+A_s)^2} - \gamma_2 U \end{aligned}$$

Si U devient suffisement grand (ce qui est possible si les coefficient k' et k'' deviennent suffiesement petit), le signe de $\lambda_1\lambda_2$ peut changer, c'est à dire une des racines deviendrait négative. Le calcul exact du domaine (k', k'') qui rend la solution instable est un peu long et fastidieux et nous ne le demandions pas ici.

II. TL

d. Manipulation des TL. Image de la fonction

$$f(t) = (e^{-bt} - e^{-at})/t$$

Soit $\hat{f}(s) = TL[f(t)]$.Alors,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds}\hat{f}(s) &= TL[tf(t)] = TL[(e^{-bt}-e^{-at})] \\ &= \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'intégrer pour trouver

$$\hat{f}(s) = \log\frac{s+a}{s+b} + Cte$$

Comme $\hat{f}(0) = \int_0^\infty f(t)dt = \log(a/b)$, nous avons $Cte = 0$.

e. Existence. Pouvez vous dire pourquoi on ne calcule pas directement la TL de la fonction $g(t) = e^{-at}/t$? La fonction $g(t)$ diverge près de $t = 0$ en $1/t$. L'intégrale de Laplace

$$\int_0^A dt\, e^{-st}/t$$

n'est donc pas défini (nous avons un problème de divergence logarithmique). La fonction $f(t)$ reste par contre fini proche de l'origine, puisque $e^{at} - e^{bt} = (a-b)t + O(t^2)$ et donc $f(t) = (a-b) + O(t)$.

f. Extension. Nous avons juste à combiné une suite d'opération comme à la section précédente :

$$\begin{aligned} 1/\sqrt{t} &\rightarrow \sqrt{\pi}/\sqrt{s} \\ (e^{-bt}-e^{-at})/\sqrt{t} &\rightarrow \sqrt{\pi}/\sqrt{s+b}-\sqrt{\pi}/\sqrt{s+a} \\ (e^{-bt}-e^{-at})/t\sqrt{t} &\rightarrow 2\sqrt{\pi}\left(\sqrt{s+a}-\sqrt{s+b}\right)+Cte \end{aligned}$$

Et la constante est nulle pour les même raison que précédement.

III. SUPERSYMÉTRIE.

g. Montée et descente. Nous avons

$$\begin{aligned} [d/dx, W(x)]f(x) &= d/dx(W(x)f(x)) - W(x).(d/dx)(f(x) \\ &= W'(x)f(x) \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. Soit maintenant

$$\begin{aligned} (-d/dx+W)(d/dx+W) &= -d^2/dx^2+W^2-[d/dx,W] \\ &= -d^2/dx^2+W^2-W' \\ &= -d^2/dx^2+V_1 \end{aligned}$$

L'opérateur H_2 quant à lui est défini par

$$\begin{aligned} AA^\dagger &= -d^2/dx^2+W^2+[d/dx,W] \\ &= -d^2/dx^2+W^2+W' \end{aligned}$$

et donc

$$V_2(x) = W^2(x)+W'(x)$$

h. Valeurs et fonctions propres. Soit $H_1\psi_n = \lambda_n\psi_n$.

$$\begin{aligned} H_2(A\psi_n) &= AA^\dagger A\psi_n \\ &= AH\psi_n \\ &= \lambda_n A\psi_n \end{aligned}$$

i. Construction de W. Soit maintenant

$$W(x) = -\psi_0'(x)/\psi_0(x)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} -W^{'}+W^2 &= \frac{\psi_0''\psi_0-\psi_0'^2}{\psi_0^2}+\frac{\psi_0'^2}{\psi_0^2} \\ &= \frac{\psi_0''}{\psi_0} \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la définition du ψ_0, nous avons

$$-\psi_0''+V_1\psi_0 = \lambda_0\psi_0$$

ou

$$V_1 = \lambda_0+\frac{\psi_0''}{\psi_0}$$

Comme nous avons choisi $\lambda_0 = 0$, tout est en ordre.

j. Application : puits de potentiel infini. Nous avons

$$H_1\cos(2n+1)x = \left((2n+1)^2-1\right)\cos(2n+1)x$$

Par ailleurs, cette fonction s'annule bien en $\pm\pi/2$. La fonction W est donné par

$$W(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

et le potentiel V_2 par

$$\begin{aligned} V_2(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)}+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{2}{\cos^2 x}-1 \end{aligned}$$

L'opérateur d'échange est

$$A = d/dx+W$$

et les fonctions propres de l'opérateur H_2 sont donc

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= A\psi_n(x) \\ &= -(2n+1)\sin(2n+1)x+\frac{\sin x}{\cos x}\cos(2n+1)x \end{aligned}$$

associé aux valeurs propres $\lambda_n = (2n+1)^2-1$. A vrai dire, nous n'avons pas voulu rentrer trop dans les détails, vous pouvez constater que

$$\phi_0(x) = -\sin x+\sin x = 0$$

En faite, l'opérateur d'annihilation *détruit* la fondamentale ψ_0 de H_1, donc le vrai fondamental de H_2 est la fonction ϕ_1, associé à la valeur propre 8.

k. Shift et conclusion. Trivialement, nous concluons que les valeurs propres de H_{sec} sont donnée par

$$\lambda_n = (2n+1)^2,\ n = 1,2,\ldots$$

associée aux mêmes fonctions ϕ_n.