Examens de Mathématiques, L3 Physique, Octobre 2009.

I. THÉORÈME D'ÉCHANTILLONNAGE.

L'échantillonnage consiste a enregistrer un signal $f(t)$ seulement sur un nombre discret de points $f_n = f(n\tau)$ (Fig. 1). Le théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist nous affirme que nous sommes capable de reconstituer *exactement* la fonction $f(t)$ à partir des f_n à deux conditions :

1. La fonction originale $f(t)$ ne contient pas de fréquences plus élevé qu'une certaine fréquence que nous notons ω_0. Précisément, cela veut dire que
$$\tilde{f}(\omega) = 0 \text{ si } \omega \notin [-\omega_0, \omega_0]$$
2. nous avons échantillonné le signal à au moins $\tau = \pi/\omega_0$.

Si ces deux conditions sont réalisées, alors nous pouvons reconstituer exactement la fonction à l'aide seulement des f_n de la façon suivante :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n sinc\left(\omega_0 \left(t - n\tau\right)\right) \qquad (1)$$

où $sinc(u) = (\sin u)/u$. Ce théorème, énoncé vers 1953, joue un rôle crucial dans les communications radio et enregistrement des signaux ; les CD par exemple sont échantillonné à 48kHz, deux fois le seuil de l'audition humaine en fréquence.

1. Commentaires. Expliquez ce que vous comprenez par la formule (1). Aidez-vous d'un graphe.

2. porte Soit une fonction $f(t)$ quelconque. Montrez graphiquement les fonctions $f(t)$ et $2f(t)\Pi(t/a)$, où Π représente la fonction porte. Désignons par ω la variable conjuguée à t lors d'une TF. Que valent

$$\mathrm{TF}\left[\Pi(t/a)\right] \text{ et } \mathrm{TF}^{-1}\left[\Pi(\omega/\omega_0)\right]$$

où a et ω_0 sont des constantes ?

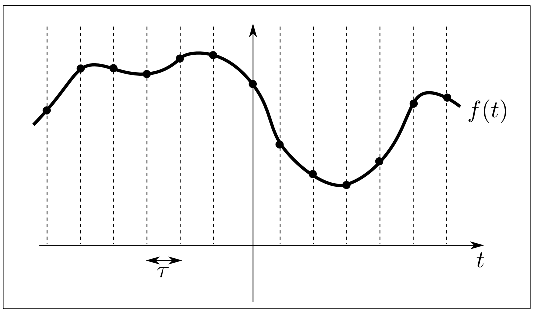

FIG. 1 Echantillonnage d'un signal $f(t)$ à intervalle régulier τ

3. Peigne de Dirac. La peigne de Dirac est définie par

$$\Psi_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - na)$$

Soit la distribution

$$\Psi_a(t).f(t) = \sum_n f(t)\delta(t - na)$$

Représenter graphiquement la distribution $\Psi_a(t)$ et la distribution $\Psi_a(t).f(t)$ où f est une fonction quelconque. Démontrer que

$$\Psi_a(t).f(t) = \sum_n f(na)\delta(t - na)$$

[Help : égalité entre distribution].

4. Convolution. Rappeler ce que vaut $(f * \delta_a)(t)$, le produit de convolution de la fonction quelconque $f(t)$ avec la distribution de Dirac $\delta(t-a)$. Soit maintenant la fonction $f(t)$ à support bornée : $f(t) = 0$ si $t \notin [-b, b]$. Représenter graphiquement $(f * \delta_{2a})(t)$ dans les cas où $b > a$, $b = a$ et $b < a$. En utilisant ces résultats, représenter graphiquement

$$(\Psi_{2a} * f)(t)$$

dans les trois cas précédent.

5. Linéarité. Démontrer que le produit de convolution est linéaire, c'est à dire

$$(\lambda f + \mu g) * h = \lambda(f * h) + \mu(g * h)$$

6. Résultat admis. Nous admettons le résultat suivant : la TF d'une peigne de Dirac est une peigne de Dirac (voir les examens des années précédentes) :

$$\mathrm{TF}[\Psi_a(t)] = (2\pi/a)\Psi_{2\pi/a}(\omega)$$

De quelle distribution $\Psi_{\omega_0}(\omega)$ est elle la TF ?

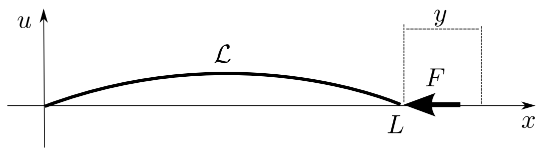

FIG. 2 Flambage sous l'effet d'une force.

7. Mise en place. Soit maintenant la fonction à support bornée $\tilde{f}(\omega)$, nulle en dehors de l'intervalle $[-\omega_0, \omega_0]$. En utilisant les résultats précédents, argumenter pourquoi

$$\tilde{f}(\omega) = 2\left(\tilde{f} * \Psi_{2\omega_0}\right)(\omega).\Pi(\omega/\omega_0)$$

Aidez vous d'un graphique.

8. TF inverse. En appliquant la TF inverse à l'équation précédente, démontrer que

$$f(t) = \left(\sum_{-n=\infty}^{\infty} f(t).\delta(t - n\pi/\omega_0)\right) * sinc(\omega_0 t)$$

[**Help** : $\mathrm{TF}^{-1}[(\tilde{f} * \tilde{g})(\omega)] = 2\pi f(t).g(t)$].

9. Fin A partir de l'équation précédente, obtenir enfin l'équation (1) de Nyquist-Shannon.

Note. En général, le théorème de Nyquist est énoncée à l'aide des fréquences ν et non des fréquences angulaires ω comme nous l'avons fait ici. Sachant que $\omega = 2\pi\nu$, le théorème d'échantillonnage est souvent énoncé par la formulation $\tau < 1/2\nu_0$.

II. FLAMBAGE DES POUTRES.

Posez une règle à la verticale et appuyez avec un doigt dessus : au bout d'une certaine pression, la règle fléchit soudain. On appelle cette transition brusque le "flambage". Le flambage est par exemple la raison principale qui limite la hauteur des immeubles : au delà d'une certaine taille, l'immeuble flambe sous son propre poids. Nous allons étudier ce phénomène à l'aide des séries de Sinus.

Minimum. Pour une fonction $f(z_1, ..., z_n) = a_1 z_1^2 + ... + a_n z_n^2$, le point $z_1 = z_2 = ... = z_n = 0$ est un minimum si $a_i > 0\ \forall i$. En mécanique, Un point constitue un équilibre stable si c'est un minimum de l'énergie potentielle.

Définitions. Nous considérons une barre de longueur $\mathcal{L}$ qui sous l'effet d'une force F "flambe". La flèche de la barre est repéré par la fonction $u(x)$. La barre est contraintes de garder ses extrémités à $u = 0$. La différence entre la longueur de la barre et sa longueur projeté L est notée $y = \mathcal{L} - L$ (Fig. 2).

Soit la fonction $u(x)$ sur l'intervalle $[0, L]$ telle que $u(0) = u(L) = 0$. Nous notons sa décomposition en série de sinus par

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L)$$

1. Parseval. En utilisant l'orthogonalité des sinus, démontrer l'égalité de Parseval :

$$\int_0^L u(x)^2 dx = (L/2)\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

Obtenez alors

$$\int_0^L (u'(x))^2\, dx \text{ et } \int_0^L (u''(x))^2\, dx$$

en fonction des harmoniques b_n.

2. Energie Potentielle. L'énergie potentielle de la barre s'écrit

$$\mathcal{E} = \int_0^L (1/2) B\,(u''(x))^2\, dx - Fy$$

où B est le module de rigidité de courbure et F la force appliquée sur la barre à son extrémité. Nous considérons le début de l'instabilité où la flèche est faible ($u'(x) \ll 1$). Dans ce cas

$$\begin{aligned} y = \mathcal{L} - L &= \int_0^L \left(\sqrt{1 + u'(x)^2} - 1\right) dx \\ &= (1/2)\int_0^L u'(x)^2 dx \end{aligned}$$

Obtenez alors l'énergie potentielle en fonction de l'amplitude des harmoniques b_n.

3. Instabilité. La position de la barre droite (non flambée) correspond à $b_n = 0\ \forall n$. A partir de quelle valeur F_c de la force cette équilibre devient instable ? Quelle est le mode qui devient instable en premier ? Comment cela correspond à votre expérience de poussée sur une règle ?

4. Hauteur. Si il vous reste du temps, discutez comment vous pourriez utiliser ce résultat pour calculer la hauteur limite d'un bâtiment. [Note : ceci est l'explication technique de l'écroulement des tours de WTC : sous l'effet de la chaleur, la rigidité B des bâtiments, assurées par le squelette métallique, s'est abaissée au delà du seuil d'instabilité].

III. LES SOMMES D'ABEL, LES NOYAUX DE DIRICHLET.

La convergence des séries de Fourier a joué un grand rôle dans l'avancée de l'Analyse au début du XIXème, et certains concepts très proche des distributions inventés pour cela. Nous allons visiter quelques uns.

soit la fonction 2π périodique $f(x)$, dont la série de Fourier s'écrit :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Soit la fonction $h_N(x)$ la somme partielle des N premiers termes :

$$h_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

1. Coefficients de Fourier. Démontrer que

$$a_n \cos nx + b_n \sin(nx) = (1/\pi)\int_0^{2\pi} f(y)\cos(n(x-y))\,.dy$$

2. Intervalle. Soit une fonction $T-$périodique : $g(y+T) = g(y)$. Démontrer alors que

$$\int_a^{a+T} g(y)dy = \int_0^T g(y)dy$$

En déduire que

$$a_n \cos nx + b_n \sin(nx) = (1/\pi)\int_0^{2\pi} f(x-y)\cos(ny)dy$$

3. Noyau de Dirichlet. Soit la fonction (appelé le noyau de Dirichlet)

$$D_N(y) = 1/2\pi + (1/\pi)(\cos y + \cos 2y + ... + \cos Ny)$$

Déduire alors que

$$h_N(x) = \int_0^{2\pi} f(x-y)D_N(y)dy$$

En multipliant et divisant $D_N(y)$ par $\sin y/2$, déduire

$$D_N(y) = \frac{\sin((N+1/2)y)}{2\pi\sin(y/2)}$$

Pouvez dire vers quoi tend $D_N(y)$ quand $N \to \infty$ [Help : Vers quoi tend $h_N(x)$?]

4. Les sommes d'Abel. Certaines séries divergentes peuvent être régularisées par la procédure d'Abel : au lieu de considérer la série $S = \sum u_n$, on considère la série $S(r) = \sum r^n u_n$ où $0 \le r < 1$; Une fois le calcul fait, on étudie la limite de $S(r)$ pour $r \to 1$, qu'on appelle la somme d'Abel de la série $\sum u_n$.

Sachant la somme d'une progression géométrique

$$1 + \lambda + ... + \lambda^n = (1-\lambda^{n+1})/(1-\lambda)$$

démontrer que

$$1 - 1 + 1 - 1 + ... = 1/2$$

au sens d'Abel.

5. Somme d'Abel du noyau de Dirichlet. Reprenons le noyau de Dirichlet pour $N \to \infty$

$$\pi D_\infty(y) = 1/2 + \cos x + ...$$

notons $\delta_r(y)$ sa somme d'Abel . En considérant $r^n \cos nx$ comme la partie réelle du nombre complexe z^n, démontrer que

$$\delta_r(y) = \frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos y + r^2}$$

Quelle est la limite de $\delta_r(y)$ quand $r \to 1$? Considérer séparément les deux cas $y = 0$ et $y \neq 0$. Discuter ce résultat.