Elements de corrigé de l'Examens de Mathématiques

I. THÉORÈME D'ÉCHANTILLONNAGE DE SHANNON-NYQUIST.

1. Commentaires. Pour connaître la valeur de la fonction *entre* deux points d'échantillonage, on peut simplement approximer linéairement en prenant la moyenne de ses deux voisins, pondéré par leur distance respective :

$$f(t) = ((t - (n-1)\tau)f_{n-1} + (t - n\tau)f_n)/\tau$$

Mais ceci serait juste une approximation. Ici, on va beaucoup plus loin : pour connaître la valeur de la fonction en un point, on prend en compte tous les points de l'échantillonage, la contribution de chacun étant pondéré par la fonction *sinc* de sa distance au point t . Ceci nous donne la valeur exacte de la fonction.

2. Porte

$$TF[\Pi(t/a)] = \int_I \Pi(t/a)\exp(-it\omega)dt = a\frac{\sin a\omega}{a\omega} = \sin(a\omega)/\omega = asinc(a\omega)$$

La TF^{-1} a exactement la même structure :

$$TF^{-1}[\Pi(\omega/\omega_0] = \frac{1}{2\pi}\int_I \Pi(\omega/\omega_0)\exp(it\omega)d\omega$$

Nous voyons que les deux intégrales, à un facteur 2π, sont similaire si on échange les rôle de t et de $-\omega$:

$$TF^{-1}[\Pi(\omega/\omega_0] = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\omega_0 t}{t} = \frac{\omega_0}{2\pi}sinc(\omega_0 t)$$

3. Peigne de Dirac. Il suffit simplement se souvenir (démonstration en fait cours), qu'au sens des distributions,

$$f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)$$

il suffit maintenant d'appliquer cela à la somme tout entière :

$$\begin{aligned}\Psi_a(t).f(t) &= f(t)\sum_n \delta(t-na) \\ &= \sum_n f(t)\delta(t-na) \\ &= \sum_n f(na)\delta(t-na)\end{aligned}$$

4. Convolution. Nous nous souvenons que $(f * \delta_a)(t) = f(t-a)$, c'est à dire juste une translation. La peigne de Dirac n'est qu'une répétition de delta de Dirac, donc

$$(\Psi_a * f)(t) = \sum_n f(t-na)$$

est une superposition des $f(t-na)$, c'est à dire des $f(t)$ translatées et superposées

5. Linéarité. Trivial

6. Résultat admis. De quelle distribution $\Psi_{\omega_0}(\omega)$ est elle la TF ? $(1/\omega_0)\Psi_{\frac{2\pi}{\omega_0}}(t)$

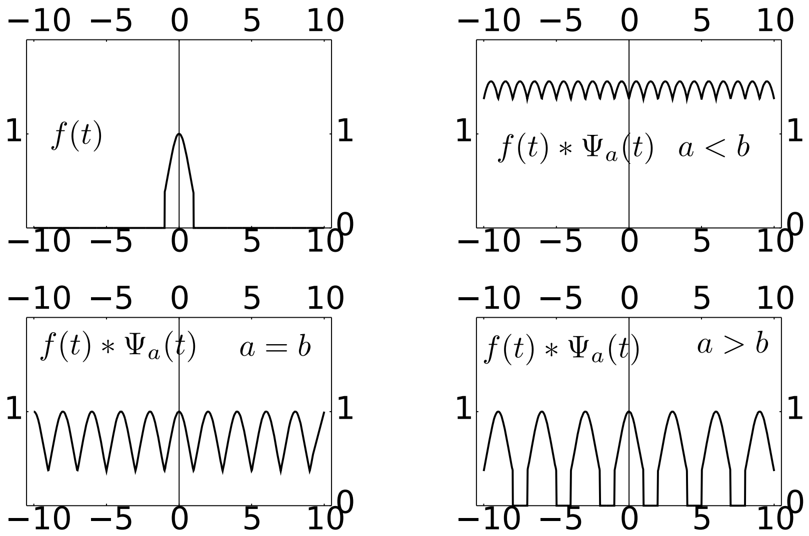

FIG. 1 convolution avec une peigne.

7. Mise en place. Soit maintenant la fonction à support bornée $\tilde{f}(\omega)$, nulle en dehors de l'intervalle $[-\omega_0, \omega_0]$. En utilisant les résultats précédents, argumenter pourquoi

$$\tilde{f}(\omega) = 2\left(\tilde{f} * \Psi_{2\omega_0}\right)(\omega).\Pi(\omega/\omega_0)$$

Ceci revient à répéter le motif $\tilde{f}(\omega)$ tous les $2\omega_0$, c'est à dire exactement la taille du support de la fonction $\tilde{f}$. Ensuite, on coupe cette répétition autour de $[-\omega_0, \omega_0]$, et le résultat est à nouveau le motif $\tilde{f}(\omega)$

8. TF inverse.

$$\begin{aligned} f(t) &= 2.2\pi\left(TF^{-1}\left[\tilde{f}(\omega)\right].TF^{-1}\left[\Psi_{2\omega_0}(\omega)\right]\right) * TF^{-1}\left[\Pi(\omega/\omega_0)\right] \\ &= 2.2\pi\left(f(t).(1/2\omega_0)\Psi_{\pi/\omega_0}(t)\right) * ((\omega_0/2\pi)sinc(\omega_0 t)) \\ &= \left(f(t).\Psi_{\pi/\omega_0}(t)\right) * (sinc(\omega_0 t)) \\ &= \left(\sum_n f(t)\delta(t - n\pi/\omega_0)\right) * (sinc(\omega_0 t)) \end{aligned}$$

9. Fin Il suffit de se souvenir que $\sum_n f(t)\delta(t-n\pi/\omega_0) = \sum_n f(n\pi/\omega_0)\delta(t-n\pi/\omega_0)$ et que convolution avec un Dirac est une translation.

II. FLAMBAGE.

Définitions. Soit la fonction $u(x)$ sur l'intervalle $[0, L]$ telle que $u(0) = u(L) = 0$. Notons sa décomposotion en série de sinus par

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L)$$

1. Parseval. En utilisant l'othogonalité des sinus, démontrer l'égalité de Parseval :

$$\int_0^L u(x)^2 dx = (L/2) \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

Il suffit de noter que

$$\int_0^L u(x)^2 dx = \int_0^L \left(\sum_{n,m} \sin(n\pi x/L) \sin(m\pi x/L) \right) dx$$

Or, pour $m \neq n$, l'intégrale vaut zéro (orthogonalité) et pour $m = n$, l'intégrale vaut

$$\int_0^L \sin^2(n\pi x/L) dx = L/2$$

Comme les conditions aux bords sont correctes, nous avons

$$u'(x) = \sum (n\pi/L) b_n \cos(n\pi x/L)$$

et donc

$$\int_0^L u'(x)^2 dx = (L/2) \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi/L)^2 b_n^2$$

De même,

$$\int_0^L u''(x)^2 dx = (L/2) \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi/L)^4 b_n^2$$

2. Energie Potentiel. D'après ce que nous avons dit, l'énergie potentielle s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_0^L \left[(B/2) u''(x)^2 - F/2 u'(x)^2 \right] dx \\ &= \frac{L}{2} \sum_n \left(\frac{B}{2} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 - \frac{F}{2} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) b_n^2 \end{aligned}$$

3. Instabilité. Le système est stable tant que tous les coefficients sont > 0, c'est à dire tant que

$$F < B \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2$$

La plus faible valeur de F qui peut rendre instable le système correspond à $n = 1$, c'est à dire

$$F_c = B \left(\frac{\pi}{L} \right)^2$$

4. Hauteur. Il suffit de considérer un batiment de hauteur H. Prenons une sections à distance L de la terre. Il subbit le poids du batiment au dessus de lui

$$F = (H - L)\rho g$$

Si cette force dépasse $B(\pi/L)^2$, le batiment s'écroule. Il n'est pas difficile de démontrer (ce n'était pas demandé) que l'écroulement arrive à

$$L_c = 2H_c/3$$

où

$$H_c = 3(\pi^2 B/\rho g)^{1/3}$$

III. ABEL ET DIRICHLET.

1. Coef de Fourier. Nous savons que exemple

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\cos(ny)dy \ ; \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\sin(ny)dy$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} a_n\cos nx + b_n\sin(nx) &= (1/\pi)\int_0^{2\pi} f(y)\left(\cos(nx)\cos(ny)+\sin(nx)\sin(ny)\right).dy \\ &= (1/\pi)\int_0^{2\pi} f(y)\cos\left(n(x-y)\right).dy \end{aligned} \tag{1}$$

2. Intervalle. Par définition des intégrales, nous avons

$$\int_0^T = \int_0^a + \int_a^{a+T} + \int_{a+T}^T \tag{2}$$

Prenons le dernier terme :

$$\begin{aligned} \int_{a+T}^a g(y)dy &= \int_a^0 g(y+T)dy \\ &= \int_a^0 g(y)dy \end{aligned}$$

La première ligne est obtenue par un changement de variable $y \to y+T$ et la deuxième ligne en utilisant la périodicité de g. Le premier et le troisième terme de la droite de l'équation (2) se compensent donc.

posons maintenant $y = x-u$ dans l'équation (1) et utilisons le faite que $f(x)\cos(nx)$ est $2\pi-$périodique

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(y)\cos\left(n(x-y)\right).dy &= -\int_x^{x-2\pi} f(x-u)\cos\left(nu\right).du \\ &= -\int_0^{-2\pi} f(x-u)\cos\left(nu\right).du \\ &= \int_{-2\pi}^0 f(x-u)\cos\left(nu\right).du \\ &= \int_0^{2\pi} f(x-u)\cos\left(nu\right).du \end{aligned}$$

3. Noyau de Dirichlet. Il nous faut juste réglet le cas de a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)dy \end{aligned}$$

Par exactement la même démarche, ce qui nous donne, en utilisant la définition de h_N,

$$h_N(x) = \int_0^{2\pi} f(x-y)D_N(y)dy$$

Remarquons maintenant que

$$2\sin(y/2)\cos(ny) = \sin(n+\frac{1}{2}y) - \sin(n-\frac{1}{2}y)$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} 2\pi D_N \sin(y/2) &= \sin(y/2) + \sin(3y/2) - \sin(y/2) + \sin(5y/2) - \sin(3y/2) + ... + \sin((N+1/2)y) \\ &= \sin((N+1/2)y) \end{aligned}$$

Quand $N \to +\infty$, $h_N \to f$ et nous avons donc

$$f(x) = \int_0^{2\pi} f(x-y) D_\infty(y) dy$$

Ce qui est une propriété de la distribution δ. Nous pouvons donc suspecter que

$$\lim_{N\to\infty} D_N(y) = \delta(y)$$

On peut également observer que quand $y \to 0$, $D_N(y) \to (1/2\pi)(N+1/2)$, ce qui correspond à l'"intuition" physicienne de δ.

4. Abel. Pour $|r| < 1$, et utilisant la somme géométrique, nous avons

$$S(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (-r)^n = \frac{1}{1+r}$$

Si maintenant, nous faisons $r \to 1$, Nous avons $S(r) \to 1/2$.

5. Abel-Dirichlet. Considérons la somme d'Abel du noyau de Dirichlet :

$$\begin{aligned} S(r) &= -1/2 + 1 + r\cos x + r^2 \cos 2x + ... \\ &= -1/2 + Re\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \end{aligned}$$

où nous avons posé $z = r\cos x + i \sin x = r\exp(ix)$. Or, pour $|z| < 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n &= \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1 - r\cos x - ir\sin x} \\ &= \frac{1 - r\cos x + i\sin x}{(1-r\cos x)^2 + r^2 \sin x} \\ &= \frac{1 - r\cos x + i\sin x}{1 + r^2 - 2r\cos x} \end{aligned}$$

Donc, finalement,

$$\begin{aligned} S(r) &= -\frac{1}{2} + \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1 - 2r\cos x + r^2} \end{aligned}$$

Pour $x \neq 0$, $S(r) \to 0$ quand $r \to 1$. Par contre, si $x = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} S(r) &= \frac{1}{2}\frac{1-r^2}{(1-r)^2} \\ &= \frac{1+r}{2(1-r)} \end{aligned}$$

Qui tend vers ∞ quand $r \to 1$. A nouveau, cela correspond à l'*intuition* physicienne d'un delta de Dirac.