Examen de Mathématiques 351(bis)

Université Joseph Fourier, Département de Physique, Licence Physique Recherche.

(Dated: 16 juin 2010.)

L'examen est en trois parties indépendantes, vous pouvez les faire dans l'ordre que vous voulez. Prêtez une extrême attention à la rédaction : n'utilisez pas votre copie comme un brouillon (vous en avez à votre disposition à volonté), entourez les résultats principaux, soyez claire dans vos démonstrations, ne comptez pas sur votre professeur pour vous accorder le bénéfice de doute. L'examen ne comporte pas de pièges, le but est seulement de tester vos connaissances. Je vous souhaite une bonne copie.

I. CALCUL DES PERTURBATIONS.

A. Introduction, intérêt et objectif du problème.

Nous souhaitons résoudre, par le calcul des perturbation au premier ordre de ϵ, l'équation différentielle de Riccati,

$$\frac{dv}{dt} + v^2 + \alpha^2 + \epsilon b(t) = 0 \quad (1)$$

Cette équation se rencontre quand nous essayons de résoudre les équations différentielles linéaire de second ordre à coefficients variables comme par exemple l'équation de Mathieu

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\omega^2 + \epsilon\, b(t)\right) u = 0 \quad (2)$$

que nous avons déjà étudié en cours pour le cas particulier de l'équation de l'oscillateur paramétrique. On transforme en général l'équation (2) en l'équation (1) en effectuant le changement de fonction $u(t) = \exp(V(t))$ où $V'(t) = v(t)$.

Ce paragraphe est pour votre culture général, il n'y a rien à démontrer ou à calculer.

B. Préliminaires

1. Vérifier que la solution de l'équation différentielle
$$\frac{du}{dt} + a(t)u = b(t) \ ; \ u(0) = u_0$$
est
$$u(t) = e^{-A(t)} \left(u_0 + \int_0^t e^{A(\tau)} b(\tau) d\tau \right) \quad (3)$$
où $A'(t) = a(t)$ et $A(0) = 0$.
2. Vérifier que la l'équation différentielle
$$\frac{dv}{dt} + v^2 + \alpha^2 = 0 \ ; \ v(0) = 0 \quad (4)$$
possède la solution
$$v(t) = -\alpha \tan(\alpha t)$$
où a est une constante et C une constante arbitraire à déterminer avec les conditions initiales.

C. Riccati.

Soit l'équation

$$\frac{dv}{dt} + v^2 + \alpha^2 + \epsilon b(t) = 0$$

En écrivant la solution à l'ordre 1 sous la forme de

$$v(t) = v_0(t) + \epsilon v_1(t)$$

où v_0 est la solution de l'équation (4), obtenir l'équation différentielle qui gouverne $v_1(t)$. Résoudre l'équation sur v_1, avec la condition initiale $v_1(0) = 0$, en utilisant le résultat (3).

D. Application.

Trouver la solution explicite à l'ordre 1 dans le cas $b(t) = 2\alpha \tan(\alpha t)$.

E. Limitation.

Quelle est la limitation du calcul et la limite de validité du calcul à l'ordre 1 dans le cas général ?

II. TRANSFORMÉ DE LAPLACE

Nous souhaitons utiliser les TL pour résoudre un système de deux équations différentielles de premier ordre.

A. Préliminaires.

Nous admettons que la solution de l'équation différentielle

$$\frac{d\hat{v}}{ds} + a(s)\hat{v} = b(s)$$

est

$$\hat{v}(s) = e^{-A(s)} \left(c + \int_0^s e^{A(\sigma)} b(\sigma) d\sigma \right)$$

où c est une constante d'intégration arbitraire et $A'(s) = a(s)$.

1. Soit la fonction
$$a(s) = \frac{-n}{s(s-1)}$$
En décomposant $a(s)$ en fraction simple, calculez sa primitive $A(s) = \int a(s)ds$ (on prendra la constante d'intégration égale à zéro) et démontrer que
$$e^{A(s)} = \left(\frac{s}{s-1}\right)^n$$
2. Quelle est la dérivée de la fonction $\exp(A(s))$ ci-dessus ?

B. Le problème.

Nous souhaitons résoudre le système d'équation différentielle suivant pour les deux fonctions $u(t)$ et $v(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - v &= 0 \\ t\frac{dv}{dt} + (1-t)v + nu &= 0 \end{aligned}$$

avec les conditions initiales

$$u(0) = 1 \ ; \ v(0) = n$$

où n est une constante. En utilisant les règles de manipulation des transformée de Laplace, démontrer que nous pouvons obtenir une équation différentielle de premier ordre pour la fonction $\hat{v}(s) = \mathrm{TL}[v(t)]$ de la forme

$$\hat{v}'(s) + a(s)v(s) = b(s) \qquad (5)$$

où vous préciserez les fonctions $a(s)$ et $b(s)$.

C. Résolution.I

1. En utilisant les résultats préliminaires, résoudre l'équation (5) et obtenir $\hat{v}(s)$.
2. En déduire la fonction $\hat{u}(s)$.

D. Application.

En utilisant le résultat de la question (II.C), Trouver l'original $u(t)$ pour $n = 0, 1, 2$.

E. Conclusion.

Ce paragraphe est pour votre culture général, il n'y a rien à démontrer ou à calculer. Notre but initial était d'étudier une équation très importante de la physique-mathématique que vous avez déjà rencontré lors de vos cours de mécanique quantique et le traitement de l'atome d'hydrogène. Cette équation s'appelle l'équation de Laguerre

$$tu'' + (1-t)u' + nu = 0$$

que l'on transforme dans le système que vous avez traité en utilisant la fonction auxiliaire $v(t) = u'(t)$.

III. ALGÈBRE DES OPÉRATEURS ET L'OPÉRATION DE DÉRIVATION.

Soit un opérateur linéaire $\bar{A}$ défini dans l'espace des fonctions (nous utiliserons un symbole sur-ligné pour désigner un opérateur) . Un exemple typique est l'opérateur $\bar{D} = d/dx$ qui à une fonction $f(x)$ associe la fonction $f'(x)$. Nous avons beaucoup étudié l'algèbre des opérateurs en cours. Nous allons retrouver ici quelques résultats élémentaires. Soit t un scalaire $t \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\bar{A}t = t\bar{A}$ [Help : Appliquer les deux opérateurs à une fonction quelconque].
2. Démontrer que $(t\bar{A})^n = t^n\bar{A}^n$. [Help : Rappeler ce que veut dire une puissance d'un opérateur].
3. Soit un opérateur $\bar{H}_t$ dépendant d'un paramètre scalaire (comme par exemple l'opérateur $(t\bar{A})^n$). Nous définissons l'opérateur "dérivée par rapport à t" h_t de la façon suivante :
$$h_t = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}\left(\bar{H}_{t+\epsilon} - \bar{H}_t\right)$$
Démontrer alors, en utilisant les deux questions précédentes et vos connaissances de la dérivée habituelle, que la dérivée par rapport à t de l'opérateur $(t\bar{A})^n$ est l'opérateur
$$nt^{n-1}\bar{A}^n$$
4. En déduire que la dérivée par rapport à t de l'opérateur $\exp(t\bar{A})$ est l'opérateur
$$\bar{A}\exp(t\bar{A})$$
[Help : utiliser la définition en terme de série de l'opérateur $\exp(t\bar{A})$]
5. Faire la même chose avec l'opérateur $\left(1 - t\bar{A}\right)^{-1}$ [Help : à nouveau, il faut utiliser le développement en série de cet opérateur].