Examen de Mathématiques 362.

Université Joseph Fourier, Département de Physique, Licence Physique Recherche.
(Dated: 16 juin 2010.)

I. CALCUL DES PERTURBATIONS.

Nous souhaitons résoudre, par le calcul des perturbation au premier ordre de ϵ, l'équation differentielle

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\omega^2 + \epsilon\, b(t)\right) u = 0$$

A. Préliminaire

Vérifier que la solution de l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} + a(t)u = b \ \ ; \ \ u(0) = u_0$$

possède la solution

$$u(t) = e^{-A(t)} \left(u_0 + \int_0^t e^{A(s)} b(s) ds \right)$$

où $A'(t) = a(t)$.

B. Préliminaire 2.

Vérifier que la l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} + v^2 + \alpha^2 = 0 \tag{1}$$

possède la solution

$$v(t) = \alpha \tan(\alpha t)$$

où a est une constante et C une constante arbitraire à déterminer avec les conditions initiales.

C. Riccati.

Pour développer

$$\frac{dv}{dt} + v^2 + \alpha^2 + \epsilon b(t) = 0$$

à l'ordre de 1 en ϵ,

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0(t) + \epsilon v_1(t) \\ v^2(t) &= v_0^2 + 2\epsilon v_0 v_1 + O(\epsilon^2) \\ v'(t) &= v_0' + \epsilon v_1 \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation, nous trouvons

$$\begin{aligned} \left(v_0' + v_0^2 + \alpha^2\right) &+ \\ \epsilon(v_1' + 2v_0 v_1) &= \epsilon b(t) \end{aligned}$$

Le terme d'ordre 0 est automatiquement, et donc

$$v_1' + 2v_0 v_1 = b(t)$$

D. Résolution.

On peut maintenant utiliser les résultats préliminaires pour donner directement la solution : Si l'on pose $a(t) = 2v_0(t) = -2\alpha \tan(\alpha t)$, nous avons

$$A(t) = 2\log\left(\cos(\alpha t)\right)$$

et

$$e^{A(t)} = \cos^2(\alpha t)$$

Nous avons donc

$$v_1(t) = \frac{-1}{\cos^2(\alpha t)} \int_0^t \cos^2(\alpha\tau) b(\tau) d\tau$$

Nous Remarquons que quand $t \to \pi/2\alpha$, $v_1(t)$ devient très grand et nous violons donc les hypothèse de départ, sauf si l'intégrale produit des termes pour compenser cette divergence. Donc en général, le calcul que nous venons de faire est valable pour les faibles temps.

II. TRANSFORMÉ DE LAPLACE

Nous souhaitons utiliser les TL pour résoudre un système de deux équations différentielles de premier ordre.

A. Prélminaires.

1. Soit la fonction

$$a(s) = \frac{-n}{s(s-1)}$$

En décomposant $a(s)$ en fraction simple, calculez ça primitive $A(s) = \int a(s)ds$ (on prendra la constante d'intégréation égale à zéro) et démontrer que

$$e^{A(s)} = \left(\frac{s}{s-1}\right)^n$$

2. Quelle est la dérivée de la fonction $\exp\left(A(s)\right)$?

$$a(s) = n\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} A(s) &= n\left(\log s - \log(s-1)\right) \\ &= \log\left(\frac{s}{s-1}\right)^n \end{aligned}$$

D'où trivialement, le résultat sur $\exp(A(s))$. En dérivant cette fonction, nous trouvons

$$\left(e^{A(s)}\right)' = -n\frac{s^{n-1}}{(s-1)^{n+1}}$$

B. Le problème.

Nous souhaitons résoudre le système d'équation différentielle suivant pour les deux fonctions $u(t)$ et $v(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - v &= 0 \\ t\frac{dv}{dt} + (1-t)v + nu &= 0 \end{aligned}$$

avec les conditions initiales

$$u(0) = 1 \;\; ; \;\; v(0) = c$$

où c est une constante. En utilisant les règles de manipulation des transformée de Laplace, démontrer que nous pouvons obtenir une équation différentielle de premier ordre pour la fonction $\hat{v}(s) = \mathrm{TL}[v(t)]$ de la forme

$$\hat{v}'(s) + a(s)v(s) = b(s) \tag{2}$$

où vous préciserez les fonctions $a(s)$ et $b(s)$.

Nous obtenons

$$\hat{v}'(s) - \frac{n}{s(s-1)}v(s) = \frac{n}{s(s-1)}$$

Nous avons donc

$$e^{A(s)} = \left(\frac{s}{s-1}\right)^n$$

et la solution s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{v}(s) &= \left(\frac{s}{s-1}\right)^{-n}\left(c + n\int_0^s \left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)^n \frac{1}{\sigma(\sigma-1)}\right)d\sigma \\ &= \left(\frac{s}{s-1}\right)^{-n}\left(c + n\int_0^s \frac{\sigma^{n-1}}{(\sigma-1)^{n+1}}d\sigma\right) \\ &= \left(\frac{s}{s-1}\right)^{-n}\left(c - \left(\frac{s}{s-1}\right)^n\right) \\ &= c\left(\frac{s}{s-1}\right)^{-n} - 1 \end{aligned}$$

Nous sommes passé de la ligne (2) à la ligne (3) en utilisant le résultat préliminaire. Comme $s\hat{u}(s) = \hat{v}(s) + 1$, nous déduisons que

$$\hat{u}(s) = c\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$$

III. ALGÈBRE DES OPÉRATEURS ET L'OPÉRATION DE DÉRIVATION.

Soit un opérateur linéaire $\bar{A}$ défini dans l'espace des fonctions (nous utiliserons un symbol surligné pour désigner un opérateur) . Un exemple typique est l'opérateur $\bar{D} = d/dx$ qui à une fonction $f(x)$ associe la fonction $f'(x)$. Nous avons beaucoup étudié l'algèbre des opérateurs en cours. Nous allons retrouver ici quelques résultats élémentaires. Soit t un scalaire $t \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\bar{A}t = t\bar{A}$
   Cela vient de la définition même des opérateurs *linéaires*

$$\begin{aligned} (\bar{A}t)f(x) &= \bar{A}(tf(x)) \\ &= t\bar{A}f(x) \end{aligned}$$

2. Démontrer que $(t\bar{A})^n = t^n\bar{A}^n$.
   Nous utilisons la définition de puissance :

$$(t\bar{A})^n = (t\bar{A})(t\bar{A})...(t\bar{A})$$

   Considérons la brique de base, en appelant $g(x) = \bar{A}f(x)$:

$$\begin{aligned} (t\bar{A})(t\bar{A})f(x) &= (t\bar{A})(tg(x)) \\ &= t(t\bar{A})g(x) \\ &= t^2\bar{A}g(x) \\ &= t^2\bar{A}\bar{A}f(x] \\ &= t^2A^2f(x) \end{aligned}$$

   En applicant ces lignes n fois, nous arrivons au résultat souhaité.

3. Démontrer alors, en utilisant les deux questions précédentes et vos connaissances de la dérivée habituelle, que la dérivée par rapport à t de l'opérateur $(t\bar{A})^n$ est l'opréteur

$$nt^{n-1}\bar{A}^n$$

   appelons $h(t)$ l'opérateur résultant. Alors, par définition,

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{\epsilon}\left\{\left((t+\epsilon)\bar{A}\right)^n - \left(t\bar{A}\right)^n\right\} \\ &= \frac{1}{\epsilon}\left\{(t+\epsilon)^n - t^n\right\}\bar{A}^n \end{aligned}$$

   Pour passer de la première ligne à la seconde, nous avons utilisé le résultat de la question précedente et la distributivité de l'algèbre des opérateurs. Par contre, le terme entre {} est la dérivée habituelle que nous conaissons et vaut donc nt^{n-1}

4. En déduire que la dérivée par rapport à t de l'opérateur $\exp(t\bar{A})$ est l'opérateur

$$\bar{A}\exp(t\bar{A})$$

Nous utilisons la défintion de lexponentielle d'un opérateur

$$\exp(tA) = 1 + (tA) + ... + \frac{1}{n!}(tA)^n + ...$$

D'après ce que nous avons dit, la dérivée terme à terme $\bar{h}_t$ doit donc s'écrire

$$\begin{aligned}
\bar{h}_t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} t^{n-1} \bar{A}^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \bar{A}^n \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \bar{A}^{n-1} \right) \bar{A} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^{n} \bar{A}^{n} \right) \bar{A} \\
&= \exp(t\bar{A})A
\end{aligned}$$

5. Faire la même chose avec l'opérateur $\left(1 - t\bar{A}\right)^{-1}$ [Help : à nouveau, il faut utiliser le développement en série de cet opérateur].