Examen de Mathématiques 362.

Université Joseph Fourier, Département de Physique, Licence Physique Recherche.

(Dated: 26 Mai 2010)

I. EQUATION DE HEUN.

L'équation au valeur propre de Heun pour la fonction $\phi(x)$

$$(x-1)^2 \frac{d}{dx}\left(N\phi - x\phi'\right) = \lambda\phi$$

apparaît à de nombreuses endroit en physique. En particulier, en génétique des populations et théorie de l'évolution, le temps de "dérive génétique" est donné par les valeurs propres de cette équation, et c'est ce que nous allons calculer.

A. Transformation.

Transformez cette équation en un system Sturm-Liouville habituel en utilisant la transformation $y = 1/(1-x)$.

B. Valeurs Propres.

En déduire les valeurs propres λ d'après votre connaissance des valeurs propres de ces systèmes et en supposant la solution polynomiale.

II. POLYNOMES D'HERMITE : FONCTION GÉNÉRATRICE.

Pour une famille de fonctions orthogonales $P_n(x)$, il est très utile de disposer de ce qu'on appelle sa fonction génératrice $g(x,t)$. Le développement de Taylor de la fonction $g(x,t)$ en puissance de t autour du point $t=0$ "génère" les fonctions $P_n(x)$:

$$g(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \qquad (1)$$

et donc, par définition

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} g(t,x)\right]_{t=0} \qquad (2)$$

Nous allons étudier la fonction génératrice des polynômes d'Hermite $H_n(x)$. Nous acceptons la relation suivante :

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(e^{-(x-t)^2}\right)_{t=0} = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \qquad (3)$$

A. Fonction génératrice.

Nous voulons démontrer que la fonction

$$g(t,x) = e^{2tx-t^2}$$

est bien la génératrice des polynômes d'Hermite. En utilisant la définition (2) et la relation (3), démontrer que les polynôme $P_n(x)$ obtenus obéssent bien à la relation de Rodrigues des polynomes d'Hermite.

Rappel : pour un système Sturm-Liouville polynomial, la relation de Rodrigues est

$$P_n(x) = C_n \frac{1}{w}\frac{d^n}{dx^n}\left(w\alpha^n\right)$$

où C_n est une constante arbitraire, $w(x)$ le poids et $\alpha(x)$ le coefficient de $y''(x)$ dans l'équation différentielle définissant le polynôme.

B. Application : relation de récurrence.

Vérifier que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2tg$$

et en utilisant cette relation dans l'équation (1) (que nous supposons terme à terme dérivable), obtenir une relation entre la dérivée d'un polynôme d'Hermite $H_n'(x)$ et le polynôme d'Hermite d'ordre inférieure $H_{n-1}(x)$.

Note : Les fonctions génératrices, que nous n'avons pas eu le temps de développer pendant le cours, sont la méthode la plus puissante d'étudier les fonctions orthogonales.

III. VIBRATION DES POUTRES.

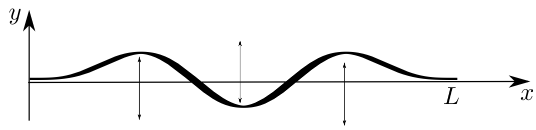

FIG. 1: Vibration d'une poutre.

Nous souhaitons obtenir l'équation de vibration des poutres élastiques pour les faibles déformations. Nous supposons que la poutre de longueur L ne peut se déformer que dans la direction verticale ; la flèche au point x au temps t est notée $y(x,t)$ (Figure 1). L'énergie cinétique de la poutre est donnée comme d'habitude par

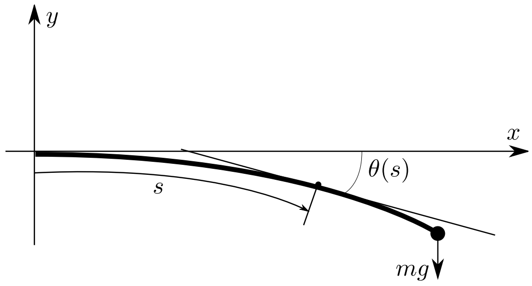

FIG. 2: Poutre et coordonnées intrinsec $(s, \theta(s))$

$$E_c = (1/2)\int_0^L \rho(\partial y/\partial t)^2 dx$$

Quand la flèche est faible, nous pouvons assimiler la courbure à $\partial_{xx}y$; l'énergie de courbure (potentielle) emmaganisée dans la poutre due aux déformations est en carré de courbure et s'écrit

$$E_b = (1/2)\int_0^L B(\partial^2 y/\partial x^2)^2 dx$$

Ici, ρ et B sont deux constantes, désignant la densité linéaire et la rigidité de courbure de la poutre. Ecrire le lagrangien de ce système mécanique et obtenir l'équation aux dérivées partielles pour $y(x,t)$, en supposant la poutre encastré sur les bords : $\partial y/\partial x|_{x=0,L} = 0$.

Help : nous avons ici à faire au calcul variationnel d'un champ qui contient des dérivées de second ordre. Nous avons déjà rencontré (lors d'un TD) des dérivées de second ordre dans les lagrangiens, il nous faut ici généraliser le concept (sans démonstration) au calcul des champs.

IV. FORME DES POUTRES À L'ÉQUILIBRE.

Nous revenons au calcul des poutres et de la flèche y mais cette fois à l'équilibre (donc la fonction y n'est fonction que de la variable x : $y = y(x)$). Nous n'allons plus nous contenter des faibles déformations. Ce calcul fait intervenir les longueurs d'arc et des expressions du genre $\sqrt{1+y'^2}$ qui sont assez malcommode. Il est beaucoup plus aisé d'utiliser les coordonnées intrinsèque, où la variable indépendante est justement la longueur d'arc s. En chaque point de la courbe, la tangente à la courbe fait un angle θ avec l'axe x (voir Figure 2). Si nous connaissions la fonction $\theta(s)$, alors nous connaîtrions complétement la courbe. Ces coordonnées sont reliées aux coordonnées cartésiennes via les relations

$$dx = \cos\theta\, ds \tag{4}$$
$$dy = \sin\theta\, ds \tag{5}$$

Ces coordonnées sont très pratique pour le calcul de la courbure κ en un point : $\kappa = (d\theta/ds)$. L'énergie de courbure stockée dans la poutre étant proportionnelle au carré de la courbure, nous avons

$$E_b = (1/2)\int_0^L B\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 ds$$

où B est la rigidité de courbure (une constante). De plus, nous suspendons une masse m à l'extrémité de la poutre, dont l'énergie potentielle est $E_p = mg\, y(L)$, ou, d'après la relation (5),

$$E_p = \int_0^L mg\sin\theta ds$$

A. Calcul exact.

Trouver la fonction $\theta(s)$ qui minimise l'énergie totale $E_p + E_b$. A vrai dire, nous serons satisfait si l'on obtient la fonction sous forme implicite

$$s = \int f(\theta)d\theta \tag{6}$$

Mais nous ne saurons pas inverser cette relation sans la connaissance des fonctions elliptiques.

B. Approximation.

En supposant que la rigidité de la poutre est très supérieure au poids ($mgL \gg B$), nous pouvons supposer que l'angle $\theta(s) \ll 1$. Calculer l'intégrale (6) dans le cadre de cet approximation et obtenir la fonction $\theta(s)$ sous forme explicite. Les conditions aux bords sont celles d'une poutre encastré à un bord et libre à l'autre :

$$\theta(0) = 0 \ ; \ \left.\frac{d\theta}{ds}\right|_{s=L} = 0$$

V. CALCUL D'INTÉGRALE.

Calculez, par la méthode des résidus, les deux intégrales suivantes :

1.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos kx}{x^2+4x+5}$$
où $k \in \mathbb{R}$ et $k > 0$. Vous devez faire un peu attention au parcours que vous choisissez, en n'oubliant pas que votre fonction doit rapidement tendre vers 0 sur l'arc que vous avez choisi. Il n' y pas de piège, mais il faut une petite effort de réflexion.

2.
$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta$$
où $n \in \mathbb{N}$. Il va de soi que vous connaissez l'expansion binomial $(a+b)^n$.