Examen de Mathématiques 362.

Université Joseph Fourier, Département de Physique, Licence Physique Recherche.
(Dated: 26 Mai 2010)

I. EQUATION DE HEUN.

valeurs propre de Heun

$$(x-1)^2 \frac{d}{dx}\left(N\phi - x\phi'\right) = \lambda\phi$$

A. Forme classique.

Posons $y = 1/(1-x)$ et $\psi(y) = \phi(x)$.Dans ce cas, $x = (y-1)/y$ et

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} &= \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2}\frac{d}{dy} \\ &= y^2\frac{d}{dy}\end{aligned}$$

Nous voyons donc que le premier term, $(1-x)^2 d/dx$ n'est rien d'autre que d/dy. En remplaçant soigneusement tous les termes, nous avons donc

$$\frac{d}{dy}\left(N\psi - \frac{y-1}{y}y^2\frac{d}{dy}\psi\right) = \lambda\psi$$

Ce qui nous donne, sous forme traditionnelle,

$$-y(y-1)\frac{d^2\psi}{dy^2} + (N+1-2y)\frac{d\psi}{dy} = \lambda\psi$$

B. Valeurs Propres.

Posons

$$\psi(y) = \sum_{m=0}^{M} a_m y^m$$

et collectons les terms en y^M, nous avons

$$\left(-M(M-1) - 2M\right) a_M = \lambda a_M$$

d'où

$$\lambda_M = -M(M+1)$$

Pour une population de taille N, le temps de dérive génétique est donné par la plus petite des valeurs propres, et s'écrit

$$\tau = -N/\lambda_1 = -N/2$$

II. POLYNOMES D'HERMITE : FONCTION GÉNÉRATRICE.

A. généretrice.

Cette question teste essentiellement vos souvenir du cours, le calcul étant trivial. En écrivant

$$2xt - t^2 = x^2 - (x-t)^2$$

la relation

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} w(t,x)\right]_{t=0}$$

nous donne

$$\begin{aligned}P_n(x) &= \frac{1}{n!}e^{x^2}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\end{aligned}$$

Or, pour les polynômes d'Hermite,

$$\alpha(x) = 1 \ ; \ w(x) = e^{-x^2}$$

et nous voyons donc que nous avons ce que nous cherchions. Il faut noter que dans la littérature, les polynomes d'hermit sont défini sans le $n!$ que nous avons là, ce qui relève simplement du choix de la constante de normalization.

B. Application : relation de récurrence.

L'utilisation de la relation sur la dérivé, en remplaçant terme à terme, nous donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n'(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2H_n(x)t^{n+1} = 0$$

En changeant l'indice de sommation dans la deuxième somme et en regroupant les puissance de t, nous avons

$$H_0'(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n'(x) - 2H_{n-1}(x)\right)t^n = 0$$

Les fonctions t^n étant indépendant, nous en déduisons

$$\begin{aligned}H_0'(x) &= 0 \\ H_n'(x) &= 2H_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, ...\end{aligned}$$

Note : si nous avions tenu compte du $n!$ dans la définissions de H_n, la relation ci-dessous aurait été $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$.

III. VIBRATION DES POUTRES.

Il suffit d'écrire

$$L = E_c - E_b$$

et se souvenir que les dérivée seconde apparaissent dans l'équation d'Euler-Lagrange sous la forme de

$$-\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial y_{xx}} + \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y_x} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

En étendant cela aux champs (remplacer x par x_i et sommer sur les i), nous trouvons

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + B\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

IV. FORME DES POUTRES À L'ÉQUILIBRE.

A. Calcul exact.

Le lagrangien s'écrit

$$L = (B/2)\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + mg\sin\theta$$

L'identité de Beltrami nous donne

$$(B/2)\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - mg\sin\theta = C$$

où C est une constante. D'où on obtient

$$\int\frac{d\theta}{\sqrt{C + mg\sin\theta}} = \sqrt{\frac{2}{B}}s$$

L'intégrale ci-dessus est connu comme l'intégrale elliptique de première sorte et son inversion nous donne θ comme la sinus elliptique de s. Nous ne connaissons pas ces fonctions et n'allons donc pas plus loin.

B. Approximation.

En assimilan $\sin\theta \approx \theta$, l'intégrale ci-dessus devient trivial et

$$\int\frac{d\theta}{\sqrt{C + mg\theta}} = \frac{2\sqrt{C + mg\theta}}{mg}$$

Et en arrangeant les termes et renommant les constantes,

$$\theta = \frac{mg}{2B}(s + k_1)^2 + k_2$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes à determiner. Donnons un nom au coefficient $mg/2B$. Un coup d'oeil nous montre que c'est l'inverse d'une longueur au carré, posons donc $mg/2B = \Lambda^{-2}$. Nous avons alors

$$\theta = \frac{1}{\Lambda^2}(s + k_1)^2 + k_2$$

Les conditions aux bords nous donne

$$k_1 = -L\ ;\ k_2 = -\left(\frac{L}{\Lambda}\right)^2$$

et

$$\theta = \frac{s(s - 2L)}{\Lambda^2}$$

l'approximation est valide quand $\Lambda \gg L$.

V. CALCUL D'INTÉGRALE.

Calculez, par la méthode des résidus, les deux intégrales suivantes :

A. Fonction rationnelle

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos kx}{x^2 + 4x + 5}$$

où $k > 0$. Nous voyons que nous pouvons calculer en faite

$$I(k) = Re\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\ \exp(ikx)}{x^2 + 4x + 5}\right)$$

Comme $k > 0$, nous prenons l'arc supérieur pour l'intégral dans le plan complexe. Les pôles de l'intégrand sont

$$z = -2 \pm i$$

et le pôle interne à l'arc est $z_0 = -2 + i$. Le résidu est donc

$$\begin{aligned}\frac{z_0 e^{ikz_0}}{2z_0 + 4} &= \frac{(-2+i)e^{-k}e^{-2ik}}{i}\\ &= e^{-k}(1 + 2i)\left(\cos 2k - i\sin 2k\right)\end{aligned}$$

Comme

$$I(k) = Re\left(2i\pi e^{-k}(1 + 2i)\left(\cos 2k - i\sin 2k\right)\right)$$

Nous avons

$$I(k) = 2\pi e^{-k}(-2\cos 2k + \sin 2k)$$

B. Fonction trigonométrique.

$$I(n) = \int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta d\theta$$

Posons comme d'habitude $z = e^{i\theta}$ et donc $d\theta = (-i/z)dz$. Nous avons alors

$$I(n) = -i\,2^{-2n}\int_0^{2\pi}(z + 1/z)^{2n}(1/z)dz$$

Or, un simple développement binomial nous donne

$$\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{2n}\left(\begin{array}{c}2n\\k\end{array}\right) z^{2n-k}z^{-k}$$

Nous avons devant nos yeux le développement de Laurent de l'intégrand, qui a un pôle en $z=0$. Nous cherchons le terme en z^{-1} , qui est obtenu pour $k=n$ dans la somme. Donc

$$A_{-1} = \left(\begin{array}{c}2n\\n\end{array}\right)$$

et donc

$$I(n) = 2\pi\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$