Examen de Mathématiques M351, L3 Physique Recherche.

(Dated: Janvier 2010.)

L'examen est en trois parties indépendantes : I sur les transformées de Laplace ; II sur le calcul des perturbations ; III sur les opérateurs linéaires. Commencez par la partie que vous aimez le plus. Les questions sont non-bloquantes, si vous n'arrivez pas à répondre à une question, admettez le résultat et passez à la suite. Rédigez clairement, en mettant en valeur les résultats importants et en évitant d'utiliser la copie comme un brouillon. Evitez le baratin inutile, si vous ne savez pas répondre à une question, les platitudes ne vous apporteront pas de points. Je vous souhaite un bon résultat.

I. TRANSFORMÉE DE LAPLACE DES BESSEL.

Les fonctions de Bessel I_n forment une famille de fonctions très souvent rencontrée en physique. La fonction $I_n(t)$ est la solution de l'équation différentielle

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - (t + \frac{n}{t})y = 0$$

Nous allons étudier quelques membres de la famille. Voici quelques informations pouvant être utiles. Nous notons t la variable de l'espace direct et s celle de l'espace réciproque. $\hat{f}(s)$ désigne la transformée de Laplace de $f(t)$.

$$I_0(0) = 1;\ I_0'(0) = 0 \quad ; \quad I_n(0) = 0 \ \ si\ n > 0$$
$$\begin{aligned} I_1(t) &= \frac{d}{dt} I_0(t) \\ \mathrm{TL}[f(t)/t] &= \int_s^\infty \hat{f}(\sigma)d\sigma \\ \lim_{s\to\infty} s\hat{f}(s) &= f(0) \\ \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+2x} &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} \end{aligned}$$

Questions.

En utilisant les règles de manipulation des TL,

1. Démontrer (en partant de l'équation différentielle) que $\mathrm{TL}[I_0(t)] = \hat{I}_0(s) = 1/\sqrt{s^2-1}$
2. Trouver la TL de la fonction $I_1(t)$.
3. Démontrer que
$$\mathrm{TL}\left[\frac{1}{t}e^{-at}I_1(at)\right] = \frac{1}{a}\left(s + a - \sqrt{s^2+2as}\right)$$
4. En utilisant la relation de récurrence entre les fonctions de Bessel
$$I_{n-1}(t) - I_{n+1}(t) = \frac{2n}{t}I_n(t)$$
déduire la TL de la fonction $e^{-t}I_2(t)$
5. Donner les développements asymptotiques ($t \to \infty$) des fonctions $e^{-t}I_1(t)$ et $e^{-t}I_2(t)$.
6. Trouver la fonction $f(t)$ qui satisfait à l'équation intégrale suivante :
$$\sinh t = \int_0^t I_0(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

II. STABILITÉ ET DYNAMIQUE DES LASERS.

La dynamique d'un laser est donné par l'intensité de faisceau émis $I(t)$ et une quantité qu'on appelle l'inversion de population $W(t)$. Ces deux quantités sont reliées par les équations

$$\frac{dI}{dt} = IW \tag{1}$$
$$\frac{dW}{dt} = 1 - r_1W - (1 + r_2W)I \tag{2}$$

où les paramètres $r_1, r_2 > 0$ sont des constantes physiques de l'instrument.

1. Etudier qualitativement ces équations : quel est l'influence de l'augmentation de W sur I et de celle de I sur W ?
2. Trouver les deux points fixes (stationnaire) de ce système.
3. Etudier la stabilité linéaire autour de chacun de ces deux points stationnaires. Quel point est stable et quel point instable ?
4. Discuter, pour le point stable, les deux cas $r_1+r_2 > 2$ et $r_1 + r_2 < 2$.
5. Nous incluons maintenant un modulateur acousto-optique dans la cavité laser, ce qui pour nous, revient à remplacer notre équation (1) par
$$\frac{dI}{dt} = I(W - \epsilon\sin\omega t)$$
En vous plaçant proche du point stationnaire stable que vous avez calculé, et en écrivant $I(t) = I_0(t) + \epsilon I_1(t)$ et $W(t) = W_0(t) + \epsilon W_1(t)$, obtenez les équations auxquelles obéissent $I_1(t)$ et $W_1(t)$ (Nous nous contentons de l'ordre 1 en ϵ).

6. Sachant que $I_1(t=0) = W_1(t=0) = 0$, comment se comportent ses deux fonctions pour les temps longs $t \to \infty$?

III. OPÉRATEURS ET COMMUTATEURS.

Nous voulons étudier certains aspects de l'équation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = iH\phi \tag{3}$$

où H est un opérateur linéaire Hermitien et $\phi(x,t)$ une fonction de deux variables réelles à valeur complexe. Le produit scalaire spatiale de deux fonctions est définie par :

$$\langle f(x,t)|g(x,t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x,t)g(x,t)dx$$

Rappel : Un opérateur est hermitien si $\langle Hf(x,t)|g(x,t)\rangle = \langle f(x,t)|Hg(x,t)\rangle \ \forall f,g$.

1. Soit la quantité $I(t) = \langle \phi(x,t)|\phi(x,t)\rangle$. En développant $I(t+dt)$ à l'ordre 1 en dt [et en utilisant la linéarité du produit scalaire], démontrer que

$$\frac{dI}{dt} = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}|\phi \right\rangle + \left\langle \phi|\frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle$$

2. En utilisant l'équation d'évolution (3) et l'hermicité de l'opérateur H, Démontrer que si au temps $t=0$ $\langle \phi(x,0), \phi(x,0)\rangle = 1$, alors cette égalité reste valable pour tous les temps, c'est à dire

$$\langle \phi(x,t)|\phi(x,t)\rangle = 1 \ \forall t$$

[Help : il suffit de démontrer que $dI/dt = 0$]. Ce résultat veut dire qu'au cours du temps, *la forme* spatiale de la fonction ϕ peut changer, mais l'intégrale sous la courbe de la fonction $\phi^*\phi$ reste constante.

3. De façon générale, étant donné l'opérateur A contenant uniquement des variables d'espace, nous définissions sa valeur moyenne sur la fonction ϕ par

$$\langle A\rangle = \langle \phi|A\phi\rangle$$

Il est essentiel de faire la distinction entre A qui est un opérateur (comme par exemple d/dx) et sa valeur moyenne $\langle A\rangle$ qui est un scalaire qui peut dépendre du temps (parce que ϕ dépend du temps). Démontrer alors que

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = i\langle [A,H]\rangle$$

où l'opérateur $[A,H] = AH - HA$ est le commutateur des deux opérateurs A et H.

4. A partir de maintenant, nous allons considérer l'opérateur $H = -a\partial^2/\partial x^2 + V(x)$, c'est à dire l'opérateur qui à la fonction $\phi(x,t)$ associé la fonction

$$H\phi(x,t) = -a\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V(x)\phi(x,t)$$

où a est un scalaire. Soit l'opérateur $P = i\partial/\partial x$. Démontrer que

$$[P,H] = -iF$$

où F est l'opérateur défini par

$$F\phi(x,t) = -V'(x)\phi(x,t)$$

En déduire $d\langle P\rangle/dt$ en fonction de la valeur moyenne de F.
[Note de culture générale : en mécanique quantique, l'opérateur P est appelé l'opérateur impulsion (ou quantité de mouvement), et l'opérateur $V(x)$ le potentiel. La relation que vous avez obtenu ressemble formellement à l'équation de la dynamique Newtonien $dp/dt = F$. On peut ainsi démontrer qu'à la limite classique, l'équation de Schrodinger se transforme dans l'équation de Newton. Nous avons inversé quelques signes ici pour minimiser les (-)]

5. On peut se demander pourquoi l'opérateur P a pris le nom d'opérateur impulsion. Soit l'opérateur X défini par $X\phi(x,t) = x\phi(x,t)$. Calculer par la méthode ci-dessus, la quantité $d\langle X\rangle/dt$ en terme de la valeur moyenne de l'opérateur P. Pouvez vous commentez le résultat que vous obtenez ? Que doit valoir le scalaire a pour retrouver formellement l'expression de la mécanique classique ?