Examen de Mathématiques M351, L3 Physique Recherche.

(Dated: Janvier 2010.)

I. TRANSFORMÉE DE LAPLACE DES BESSEL.

1. Démontrer que $\mathrm{TL}[I_0(t)] = 1/\sqrt{s^2-1}$
Nous savons que

$$\begin{aligned} I_0(t) &\rightarrow \hat{I}_0(s) \\ I_0'(t) &\rightarrow s\hat{I}_0(s) - I_0(0) = s\hat{I}_0(s) - 1 \\ I_0''(t) &\rightarrow s\left(s\hat{I}_0(s) - 1\right) - I_0'(0) = s^2\hat{I}_0(s) - s \\ tI_0(t) &\rightarrow -\hat{I}_0'(s) \\ tI_0''(t) &\rightarrow -2s\hat{I}_0(s) - s^2\hat{I}_0'(s) + 1 \end{aligned}$$

En portant tous ces termes dans l'équaton, nous obtenons

$$(s^2-1)\hat{I}_0'(s) + s\hat{I}_0(s) = 0$$

ou encore

$$\frac{\hat{I}_0'(s)}{\hat{I}_0(s)} = -\frac{s}{(s^2-1)}$$

qui en intégrant nous donne

$$\hat{I}_0(s) = C/\sqrt{s^2-1}$$

En utilisant la relation $\lim_{s\to\infty} s\hat{f}(s) = f(0)$, nous trouvons que $C = 1$.

---

2. Trouver la TL de la fonction $I_1(t)$.
Comme $I_1(t) = I_0'(t)$, nous avons

$$\hat{I}_1(s) = \frac{s}{\sqrt{s^2-1}} - 1$$

---

3. Démontrer que $\mathrm{TL}\left[(1/t)e^{-at}I_1(at)\right] = (1/a)\left(s + a - \sqrt{s^2+2as}\right)$
Nous savons que

$$e^{-t}I_1(t) \rightarrow \hat{I}_1(s+1) = \frac{s+1}{\sqrt{s^2+2s}} - 1$$

et donc

$$e^{-at}I_1(at) \rightarrow \frac{1}{a}\left(\frac{s+a}{\sqrt{s^2+2as}} - 1\right)$$

Application de $1/t$ dans l'espace réel implique une intégration dans l'espace de Laplace :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}e^{-at}I_1(at) &\rightarrow \frac{1}{a}\int_s^\infty \left(\frac{\sigma+a}{\sqrt{\sigma^2+2a\sigma}} - 1\right) d\sigma \\ &= \frac{1}{a}\left[\sqrt{\sigma^2+2a\sigma} - \sigma\right]_s^\infty \end{aligned}$$

Quand $\sigma \to \infty$, le terme entre crochet tend vers a, ce qui nous donne le résultat attendu.

---

4. En utilisant la relation de récurrence entre les fonctions de Bessel$I_{n-1}(t) - I_{n+1}(t) = (2n/t)I_n(t)$ déduire la TL de la fonction $e^{-t}I_2(t)$
Nous avons donc

$$e^{-t}I_2(t) = e^{-t}I_0(t) - \frac{2}{t}e^{-t}I_1(t)$$

Ce qui nous donne, en choisissant $a = 1$,

$$\mathrm{TL}\left[e^{-t}I_2(t)\right] = \frac{1}{\sqrt{s^2+2s}} - 2\left(s + 1 - \sqrt{s^2+2s}\right)$$

Si on voulait nettoyer cette formule (pas demandé), en prenant le dénominateur commun, on trouverait

$$\frac{\left(s+1-\sqrt{s^2+2s}\right)^2}{\sqrt{s^2+2s}}$$

---

5. Donner les développements asymptotiques ($t \to \infty$) des fonctions $e^{-t}I_1(t)$ et $e^{-t}I_2(t)$.
Nous voyons que la TL de ces deux fonctions possèdent un pôle à $s = 0$ (et un autre à $s = -2$). Quand $s \to 0$, la partie dominante de la TL de ces deux fonctions est $1/\sqrt{2s}$, exactement d'ailleurs comme la TL de I_0. Le développement assymptotique inverse de ces fonctions est données donc par $\mathrm{TL}^{-1}[1/\sqrt{2s}] = 1/\sqrt{2\pi t}$.

---

6. Trouver la fonction $f(t)$ qui satisfait à l'équation intégrale suivante : $\sinh t = \int_0^t I_0(t-\tau)f(\tau)d\tau$
Nous reconnaissons ici un produit de convolution. En prenant la TL de cette équation, nous avons

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}\hat{f}(s)$$

Et donc

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}$$

Nous en déduisons que $f(t) = \sinh t$.

II. STABILITÉ ET DYNAMIQUE DES LASERS.

1. Etudier qualitativement ces équations : quel est l'influence de l'augmentation de W sur I et de celle de I sur W ?
La première étape dans l'analyse d'une équation differentielle et d'obtenir un sens des variations. Limitons nous à $I > 0$ (normal, c'est une intensité) et $W > 0$, la discussion des autres partie du plan (I, W) est similaire. A I donné, si $W \nearrow$ alors $dI/dt \nearrow$ et et donc I croit encore plus vite. A cause du signe négatif, c'est l'inverse pour l'effet de I sur W.
On peut faire une analyse qualitative plus poussée (ce n'était bien sûr pas demandé). Considérons la première équations : $dI/dt = IW$ dont la solution est donnée, en fonction de la fonction (encore inconnue) W par
$$I(t) = I(0)e^{\int_0^t W(\tau)d\tau}$$
Nous voyons que si $I(0) \geq 0$, alors l'intensité restera toujours positif. Si $W < 0$, $I \to 0$, si $W > 0$, $I \to \infty$. Pour $W = 0$, nous arrivons à maintenir I à un niveau constant. Considérons la deuxième équation maintenant :
$$\frac{dW}{dt} = 1 - I - (r_1 + r_2 I)W$$
Comme nous savons que $I \geq 0$, ceci est l'équation d'un amortissement (le frottement minimum étant r_1) , et donc, grossièrement, si I se stabilise, $W \to (1-I)/(r_1+r_2 I)$ (on dit que W(t) suit $I(t)$: comparer à $y' = b - ay$). On voit que le seul point de fonctionnement stable possible est alors $I = 1$ et $W = 0$. Ce n'est pas encore garantit que ce point soit stable, mais c'est un bon candidat. L'analyse qualitative ne nous donne aucune indication sur la forme exacte de ces fonctions, ni sur l'échelle de temps de convergence, mais un sens de qui varie comment.

---

2. Trouver les deux points fixes (stationnaire) de ce système.
Pour avoir $dI/dt = 0$, nous devons avoir soit $I = 0$, soit $W = 0$. Considérons $I = 0$, alors pour avoir $dW/dt = 0$, nous devons avoir $W = 1/r_1$. Considérons maintenant $W = 0$, alors pour avoir $dW/dt = 0$, nous devons avoir $I = 1$. Nous avons donc, dans le plan (I, W), les deux points stationnaire suivant :
$$\begin{aligned} P_1 &: I_s = 0\,; W_s = 1/r_1 \\ P_2 &: I_s = 1\,; W_s = 0 \end{aligned}$$

---

3. Etudier la stabilité linéaire autour de chacun de ces deux points stationnaires. Quel point est stable et quel point instable ?
(a) Considérons d'abord le points P_1. Nous posons $I(t) = I_s + \epsilon I_1(t) = \epsilon I_1(t)$ et $W(t) = W_s + \epsilon W_1(t) = 1/r_1 + \epsilon W_1(t)$. Notons que dans l'équation, nous avons le produit $I(t)W(t)$,qui à l'ordre 1 en ϵ, vaut
$$I(t)W(t) = \epsilon(1/r_1)I_1(t).$$
En remplaçant dans la première équation, nous obtenons
$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{1}{r_1}I_1$$
Ce n'est pas la peine de continuer plus, puisque $I_1(t)$ croit expoentiellement et le point est donc instable.
(b) Considérons maintenant le point P_2. Nous posons $I(t) = I_s + \epsilon I_1(t) = 1 + \epsilon I_1(t)$ et $W(t) = W_s + \epsilon W_1(t) = \epsilon W_1(t)$ et le produit, à l'ordre 1 en ϵ, vaut
$$I(t)W(t) = \epsilon W_1(t)$$
En remplaçant dans les équations du laser, nous trouvons :
$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} &= W_1 \\ \frac{dW_1}{dt} &= -I_1 - (r_1 + r_2)W_1 \end{aligned}$$
Ceci est un système de deux équations différentielles de premier ordre, que nous pouvons écrire comme
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I_1 \\ W_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -(r_1 + r_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ W_1 \end{pmatrix}$$
Et dont les valeurs propres sont données par l'équation caractéristique
$$\lambda^2 + (r_1 + r_2)\lambda + 1 = 0$$
Or, nous castatons que la somme des deux racines de cette équation est négative, tandis que leur produit est positif. Les deux racines sont donc de partie réelle négative et ce point est *stable* .

---

4. Discuter, pour le point stable, les deux cas $r_1+r_2 > 2$ et $r_1 + r_2 < 2$.
Pour le points stable, les deux racines s'écrivent
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-(r_1 + r_2) \pm \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4}\right)$$
Pour $r_1 + r_2 > 2$, le retour à l'équilibre suite à un (petit) écart du point d'équilibre s'accompagne des occillations, puisque les solutions sont de la forme
$$e^{-(a+ib)t}$$

---

5. Nous incluons maintenant [...]
Le calcul est très similaire à l'exercice 3, sauf que cette fois, nous devons retenir (toujours à l'ordre 1) également un terme en $\epsilon I_s \sin\omega t$ dans la première équation, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} &= W_1 - \sin\omega t \\ \frac{dW_1}{dt} &= -I_1 - (r_1 + r_2)W_1 \end{aligned}$$

---

6. Sachant que $I_1(t = 0) = W_1(t = 0) = 0$, comment se comportent ses deux fonctions pour les temps longs $t \to \infty$?
Nous avons un système amorti excité à fréquence ω ; donc, après la disparition des transitoires, nous aurons une oscillation de I et de W à cette même fréquence [Une analogie avec les oscillateurs suffisait pour argumenter ce point dans l'examen]. Nous avons beaucoup de façon de démontrer cela, faisons le en TL.

$$\begin{aligned} s\hat{I}_1 - \hat{W}_1 &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \hat{I}_1 + (s + r_1 + r_2)\hat{W}_1 &= 0 \end{aligned}$$

Nous savons facilement résoudre ce système algébrique

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= \frac{(s + r_1 + r_2)}{s^2 + (r_1 + r_2)s + 1} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \hat{W}_1 &= \frac{1}{s^2 + (r_1 + r_2)s + 1} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Nous somme intéressé par le comportement assymptotique, donc les pôles des TL. Comme nous savons que les racines de $\left(s^2 + (r_1 + r_2)s + 1\right)$ sont de partie réelle négative, les pôles les plus à droite de ce systèmes sont $s = \pm i\omega$. Calculons le résultat pour $\hat{W}_1$, l'autre est très similaire. Quand $s \to \pm i\omega$,

$$\begin{aligned} \hat{W}_1(s) &\sim \frac{(1/2i)}{-\omega^2 + (r_1 + r_2)i\omega + 1} \frac{1}{s - i\omega} \\ &- \frac{(1/2i)}{-\omega^2 - (r_1 + r_2)i\omega + 1} \frac{1}{s + i\omega} \end{aligned}$$

dont la recombinaison nous fournira des termes en $1/(s^2 + \omega^2)$ et $s/(s^2 + \omega^2)$. Ce qui veut dire, que pour les temps longs,

$$W_1(t) \approx A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

où nous avons omis de calculer précisément les coefficients A et B.

III. OPÉRATEURS ET COMMUTATEURS.

1. En développant $I(t+dt)$ à l'ordre 1 en dt démontrer que $\frac{dI}{dt} = \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t} | \phi \right\rangle + \left\langle \phi | \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle$
Il nous suffit d'utiliser la définition d'une dérivée en développant à l'ordre 1 en dt (note : dt est réelle) :

$$\begin{aligned} I(t + dt) &= \\ \langle\phi(x, t + dt)|\phi(x, t + dt)\rangle &= \\ \langle\phi(x, t) + \partial_t\phi(x, t)dt|\phi(x, t) + \partial_t\phi(x, t)dt\rangle &= \\ I(t) + \langle\phi(x, t)|\partial_t\phi(x, t)dt\rangle + \langle\partial_t\phi(x, t)dt|\phi(x, t)\rangle &= \\ I(t) + dt\left(\langle\phi(x, t)|\partial_t\phi(x, t)\rangle + \langle\partial_t\phi(x, t)|\phi(x, t)\rangle\right) & \end{aligned}$$

Donc finalement,

$$I'(t) = \frac{I(t + dt) - I(t)}{dt} = \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t} | \phi \right\rangle + \left\langle \phi | \frac{\partial\phi}{\partial t} \right\rangle$$

---

2. Démontrer que si au temps $t = 0$ $\langle\phi(x, 0), \phi(x, 0)\rangle = 1$, alors cette égalité reste valable pour tous les temps, c'est à dire $\langle\phi(x, t)|\phi(x, t)\rangle = 1$ $\forall t$.
En suivant la suggestion, nous avons

$$\begin{aligned} I'(t) &= \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t} | \phi \right\rangle + \left\langle \phi | \frac{\partial\phi}{\partial t} \right\rangle \\ &= \langle iH\phi|\phi\rangle + \langle\phi|iH\phi\rangle \\ &= i^* \langle\phi|H\phi\rangle + i\langle\phi|H\phi\rangle \end{aligned}$$

Or, $i^* = -i$, donc $I'(t) = 0$. Nous en déduisons que $I(t) = I(0)$.

---

3. Démontrer que $\frac{d}{dt}\langle A\rangle = i\langle[A, H]\rangle$
Comme A ne dépend pas de t, et en suivant la question 1, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle A\rangle &= \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t} | A\phi \right\rangle + \left\langle \phi | A\frac{\partial\phi}{\partial t} \right\rangle \\ &= -i\langle H\phi|A\phi\rangle + i\langle\phi|AH\phi\rangle \\ &= -i\langle\phi|HA\phi\rangle + i\langle\phi|AH\phi\rangle \\ &= i\langle\phi|(AH - HA)\phi\rangle \\ &= i\langle[A, H]\rangle \end{aligned}$$

---

4. Soit l'opérateur $H = -a\partial^2/\partial x^2 + V(x)$ et l'opérateur $P = i\partial/\partial x$. Démontrer que $[P, H] = -iF$ où F est l'opérateur défini par $F\phi(x, t) = -V'(x)\phi(x, t)$ En déduire $d\langle P\rangle/dt$ en fonction de la valeur moyenne de F.
Notons d'abord que deux opérateurs de dérivées, comme par exemple ∂_x et ∂_{xx} commutent entre eux (on peut les appliquer dans l'odre que l'on veut).

Nous avons donc à calculer seulement le commutateur $[P, V(x)]$. Appliquons le à une fonction quelconque :

$$\begin{aligned}[P, H] &= [P, V(x)]f(x) \\ &= i\partial_x \left(V(x)f(x)\right) - V(x)i\partial_x \left(f(x)\right) \\ &= iV'(x)f(x) + iV(x)f'(x) - iV(x)f'(x) \\ &= iV'(x)f(x) \\ &= -iFf(x)\end{aligned}$$

Donc $[P, H] = -iF$. Nous utilisons maintenant le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle P\rangle &= i\,\langle [P, H]\rangle \\ &= \langle F\rangle\end{aligned}$$

---

5. Calculer par la méthode ci-dessus, la quantité $d\langle X\rangle/dt$ en terme de la valeur moyenne de l'opérateur P.
   Nous savons que $d\langle X\rangle/dt = i\,\langle [X, H]\rangle$. Nous avons donc à calculer ce commutateur. Il est évident que X et $V(X)$ commuttent (deux opérateurs de position), donc nous avons seulement à calculer $\langle [X, \partial_{xx}]\rangle$. Appliquons le à une fonction quelconque :

$$\begin{aligned}[X, \partial_{xx}]f(x) &= x\partial_{xx}\left(f(x)\right) - \partial_{xx}\left(xf(x)\right) \\ &= xf''(x) - 2f'(x) - xf''(x) \\ &= 2iPf(x)\end{aligned}$$

Donc, $[X, H] = -2iaP$. Cela nous donne

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle X\rangle &= i\,\langle [X, H]\rangle \\ &= 2a\,\langle P\rangle\end{aligned}$$

Nous voyons que si nous interpretons $\langle X\rangle$ comme position moyenne et donc $(d/dt)\langle X\rangle$ comme vitesse moyenne, pour avoir la relation $p = mv$, il nous faut poser $a = 1/2m$.
