Examen de Mathématiques

L3 Physique-Recherche, Octobre 2010

1 Diffusion de particules : conditions aux limites mixtes.

Des particules sont introduites à flux constant J en $x = 0$ et diffuse dans le milieu de longueur L. Toutes les particules qui atteigne l'extrémité $x = L$ du milieu sont détruites. A l'instant initial, aucune particule n'est présente dans le milieu. L'équation de concentration des particules $c(x, t)$ obéit à l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} && (1) \\ c(x,0) &= 0 && (2) \\ \left.\frac{\partial c(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} &= -J && (3) \\ c(L,t) &= 0 && (4) \end{aligned}$$

Ceci est une équation de diffusion aux conditions aux limites mixtes : à une extrémité on impose la valeur de la dérivée de la fonction, à l'autre extrémité la valeur de la fonction.

Dans le cas des géométries simples, comme ici, il est possible de régulariser les conditions aux limites en introduisant des "sources miroirs". Au lieu de considérer l'équation sur l'intervalle $x \in [0, L]$, nous prolongeons l'intervalle et considéront $x \in [0, 2L]$; nous introduisons une extraction fictive J à l'extrémité $x = 2L$. Nous oublions donc la condition au limite (4) et la remplaçons par la nouvelle condition

$$\left.\frac{\partial c(x,t)}{\partial x}\right|_{x=2L} = -J \qquad (5)$$

Nous voyons que de cette façon, nous avons le même type de condition aux deux extrémités ; nous devons cependant nous assurer *à posteriori* de la justesse de notre "miroir" en vérifiant que la solution ainsi obtenu satisfait toujours la condition réelle (4).

1. Résultat préliminaire. Trouver (i) la série de sinus et (ii) la série de cosinus de la fonction

$$f(x) = Jx$$

sur l'intervalle $x \in [0, 2L]$, où J est une constante. Pour alléger les notations par la suite, appelez ces coefficients (i) β_n et (ii)α_n. Par la suite, vous pourrez y faire référence sans les expliciter.

2. fonction auxiliaire. Soit la fonction

$$u(x, t) = c(x, t) + Jx$$

à quelle équation aux dérivée partielle obéit $u(x, t)$? Quelle sont ses conditions initiale et aux limites pour $t \in [0, \infty[$ et $x \in [0, 2L]$?

3. Résolution. Quelle bases faut-il choisir pour résoudre l'équation gouvernant $u(x, t)$? Séries de Fourier, de Sinus ou de Cosinus ? Justifier le choix de la base et résoudre l'équation pour trouver u. Trouver alors la fonction $c(x, t)$. Quelle est la forme de $c(x, t)$ quand $t \to \infty$?

4. Vérification à postériori. Démontrer que

$$c(L, t) = 0 \;\; \forall t$$

Nous voyons ici que nous avons trouvé une fonction, solution de l'équation (1) sur $[0, L]$, et satisfaisant les conditions initiales et aux limites (2-4).

5. Autres régularisation. Nous nous sommes débarrassé, dans le problème ci-dessus, de la condition au limite (4) sur la valeur de la fonction en L. Argumenter qualitativement comment on aurait pu, au lieu de cela, de nous débarasser de la condition au limite (3) sur la dérivée ?

2 Diffusion avec dégradation.

Des particules sont introduit dans un milieu unidimensionnel infini $]-\infty, \infty[$ à la position $x = 0$ et diffusent dans l'espace en se dégradant au taux α.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \alpha c + J\delta(x)$$

avec la condition initiale

$$c(x, 0) = 0$$

Nous souhaitons résoudre cette équation et obtenir le profil de concentration $c(x, t)$.

1. Dimensions. Quelles sont les dimensions des paramètres D, α et J ? Nous supposons que $[c] = 1/L$.

2. Résultat préliminaire 1. Que vaut la TF de la fonction $H(x)\exp(-kx)$? En utilisant la règle d'inversion, déduire la TF de la fonction $H(-x)\exp(kx)$. Trouver la TF de la fonction

$$e^{-k|x|}$$

en remarquant sa relation avec les deux fonctions précédentes. Déduire la TF inverse de la fonction (avec $a, b, c > 0$)

$$\tilde{f}(q) = \frac{a}{bq^2 + c}$$

3. Résultat préliminaire 2. Quelle est la solution de l'équation différentielle simple

$$y'(t) + ay(t) = b$$

où a, b sont deux constantes, avec la condition $y(0) = 0$.

4. Espace réciproque. Soit $\tilde{c}(q,t)$ la TF selon x de $c(x,t)$. Démontrer alors que

$$\tilde{c}(q,t) = \left(1 - e^{-(Dq^2+\alpha)t}\right)\frac{J}{Dq^2+\alpha} \qquad (6)$$

Quelle est la limite de $\tilde{c}(q,t)$ quand $t \to \infty$? Déduire alors la solution $c(x,t)$ quand $t \to \infty$. Représenter graphiquement cette fonction.

5. TF. Soit la fonction $g(x)$ définie par une intégrale :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k|y|} e^{-(x-y)^2/4b} dy$$

où k et b sont des paramètre. Quelle est sa TF ?

6. Touche Finale. En utilisant les résultats précédents, donner la solution complète dans l'espace directe de la fonction $c(x,t)$.

3 La formule de sommation de Poisson.

Une formule rencontrée souvent en théorie du signal ou en calcul numérique est celle de sommation de Poisson :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\frac{2\pi k}{T}) \qquad (7)$$

où T est une constante et la fonction $\tilde{f}$ est la TF de f.

1. Etant donné la fonction connue $f(t)$, soit la fonction

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT)$$

Que vaut $\phi(0)$? Démontrer que la fonction ϕ est $T-$périodique : $\phi(t+T) = \phi(t)$. Nous allons par la suite décomposer la fonction ϕ en série de Fourier complexe sur l'intervalle $[0, T]$:

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t}$$

Que vaut $\phi(0)$ en terme des coefficients c_k ?

2. En explicitant la relation entre le coefficient c_k et la fonction $\phi(t)$, Démontrer que

$$c_k = \frac{1}{T}\tilde{f}\left(\frac{2\pi k}{T}\right)$$

où $\tilde{f}(\omega) = \mathrm{TF}[f(t)]$. [Help : vous avez le droit de changer l'ordre de $\sum$ et $\int$; par ailleurs, vous savez évidement que

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$$

et vous pouvez généraliser cette formule aux intervalles infinis ; enfin, il est trivial de remarquer que $\exp(2i\pi m) = 1$ si m est un entier].

3. En utilisant les deux résultats précédents, démontrer la formule (7).

4. Application. Nous savons que $\mathrm{TF}\left[1/(1+t^2)\right] = \pi\exp(-|\omega|)$. Démontrer alors que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \pi\frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}$$

[Help : vous connaissez la somme de la série géométrique pour $\lambda < 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$]

Nous voyons ici un des intérêts numériques de la formule de poisson : quand une série converge lentement dans l'espace directe, elle converge rapidement dans l'espace réciproque.