1 Diffusion de particules : conditions aux limites mixtes.

$c(x,t)$ obéit à l'équation

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial t} &= D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} && (1)\\
c(x,0) &= 0 && (2)\\
\left.\frac{\partial c(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} &= -J && (3)\\
c(L,t) &= 0 && (4)
\end{aligned}
$$

[...] régulariser les conditions aux limites en introduisant des "sources mirroirs". $x \in [0, 2L]$ la condition au limite (4) est remplacé par la nouvelle condition

$$\left.\frac{\partial c(x,t)}{\partial x}\right|_{x=2L} = -J \quad (5)$$

1. Résultat préliminaire. Trouver (i) la série de sinus et (ii) la série de cosinus de la fonction $f(x) = x$ sur l'intervalle $x \in [0, 2L]$.

Si $f(x) = \sum_n b_n \sin(n\pi x/2L)$, alors

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2J}{2L}\int_0^{2L} x \sin(n\pi x/2L)dx\\
&= \frac{4JL}{\pi n}(-1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

Pour une série de cosinus, nous trouvons

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= JL\\
\alpha_n &= \frac{4JL}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right]
\end{aligned}
$$

2. fonction auxiliaires. Soit la fonction $u(x,t) = c(x,t) + Jx$. à quelle équation aux dérivée partielle obéit $u(x,t)$? Quelle sont ses conditions initiale et aux limites pour $t \in [0, \infty[$ et $x \in [0, 2L]$?

C'est la même équation que $c(x,t)$, mais avec les conditions aux limites

$$\partial_x u|_{x=0} = \partial_x u|_{x=2L} = 0$$

et la condition initiale

$$u(x,0) = Jx \quad (6)$$

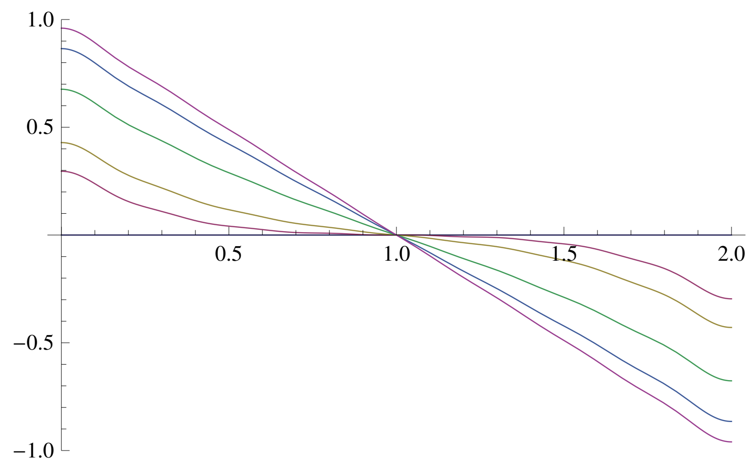

Figure 1: $c(x,t)$ pour $t = (0.1, 0.2, 0.4, 1, 2, 4)/\pi^2$

3. Résolution. Quelle bases faut-il choisir pour résoudre l'équation gouverant $u(x,t)$? Séries de Fourier, de Sinus ou de Cosinus ? Justifier le choix de la base et résoudre l'équation pour trouver u. Trouver alors la fonction $c(x,t)$.

Posons

$$u = a_0(t) + \sum_n a_n(t) \cos(n\pi x/2L)$$

En dérivant terme à terme deux fois en x et une fois en t, nous trouvons

$$a_0'(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n'(t) + D(n\pi/2L)^2 a_n(t)\right] \cos(n\pi x/2L) = 0$$

Posons $\omega_n = D(n\pi/2L)^2$. Nous aboutissons alors, en utilsant la condition initiale (6) à

$$\begin{aligned} a_0(t) &= Cte = \alpha_0 \\ a_n(t) &= \alpha_n e^{-\omega_n t} \end{aligned}$$

La fonction $c(x,t)$ s'écrit donc comme

$$c(x,t) = -Jx + \alpha_0 + \sum_{n=1} \alpha_n e^{-\omega_n t} \cos(n\pi x/2L)$$

et en utilisant la décomposition de Jx en série de cosinus,

$$c(x,t) = \sum_{n=1} \alpha_n \left(e^{-\omega_n t} - 1\right) \cos(n\pi x/2L) \tag{7}$$

4. Vérification à postériori. Dans l'expression (7), si n est impair, $\cos(n\pi/2) = 0$; si n est pair, alors $\alpha_n = 0$. La figure 1 montre la fonction $c(x,t)$ calculé avec les 16 premiers termes de la série (7) pour différents temps.

5. Autres régularisation. La fonction $u(x,t) = c + Jx$ obéit à la même équation que c, avec les conditions aux limites $u(0,t) = 0$ et $\partial_x u(L,t) = 0$. La condition initiale étant $u(x,0) = Jx$. Il suffit donc de résoudre le problème sur l'intervalle $[0, 2L]$ avec la condition au limite $u(2L,t) = 0$ et la condition initiale en triangle

$$u(x,0) = JxH(L-x) + J(2L-x)H(x-L)$$

Ce que nous illustrons ici est le principe de Curie : La symmetrie des causes est au moins égale à la symmetrie des effets. Il suffit de construire une condition initiale qui respecte la symétrie que l'on veut créer, et qu'on y adjoint les sources et flux respectant les mêmes symmétries.

2 Diffusion avec dégradation.

Des particules sont introduit dans un milieu uni-dimensionnel infini $]-\infty, \infty[$ à la position $x = 0$ et diffusent dans l'espace en se dégradant au taux α.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \alpha c + J\delta(x)$$

avec la condition initiale

$$c(x,0) = 0$$

Nous souhaitons résoudre cette équation et obtenir le profil de concentration $c(x,t)$.

1. Dimensions. Quelles sont les dimensions des paramètres D, α et J ? Nous supposons que $[c] = 1/L$.

$[D] = L^2/T$, $[\alpha] = [J] = 1/T$.

2. Résultat préliminaire 1. Nous avons (fait en cours)

$$\text{TF}\left[e^{-k|x|}\right] = \frac{2k}{k^2+q^2}$$

Pour déduire la TF inverse de la fonction $\tilde{f}(q) = a/(bq^2 + c)$, posons $k^2 = \sqrt{c/b}$.Nous pouvons alors écrire

$$\tilde{f}(q) = \frac{a}{2\sqrt{bc}}\frac{2k}{q^2+k^2}et$$

donc

$$f(x) = \frac{a}{2\sqrt{bc}}e^{-k|x|}$$

3. Résultat préliminaire 2. Pourl'équation différentielle

$$y'(t) + ay(t) = b$$

la solution est de la forme

$$y(t) = Ae^{-at} + b/a$$

La condition initiale nous impose $A = -b/a$.

4. Espace réciproque. Soit $\tilde{c}(q,t)$ la TF selon x de $c(x,t)$. Démontrer alors que

$$\tilde{c}(q,t) = \left(1 - e^{-(Dq^2+\alpha)t}\right)\frac{J}{Dq^2+\alpha} \tag{8}$$

En prenant la TF, nous aboutissons à l'équation différentielle

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} + (Dq^2 + \alpha)\tilde{c} = J$$

Nous arrivons au résultat demander immediatement en utilisant le résultat préliminaire 2.

Quelle est la limite de $\tilde{c}(q,t)$ quand $t \to \infty$? Déduire alors la solution $c(x,t)$ quand $t \to \infty$. Représenter graphiquement cette fonction.

Nous avons

$$\tilde{c}(q,\infty) = \frac{J}{Dq^2+\alpha}$$

dont la TF est, d'après le résultat préliminaire 1,

$$c(x,\infty) = \frac{J}{2\sqrt{D\alpha}}e^{-k|x|}$$

où $k^2 = \alpha/D$.

5. TF inverse et touche finale. Soit la fonction $g(x)$ définie par une intégrale :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k|y|}e^{-(x-y)^2/4b}dy$$

où k et b sont des paramètre. Quelle est sa TF ?

Nous reconnaissons ici un produit de convolution. Nous avons

$$\text{TF}\left[e^{-x^2/4b}\right] = \sqrt{4\pi b}e^{-bq^2}$$

et comme la TF transforme un produit simple en produit de convolution,

$$\tilde{g}(q) = \frac{2k\sqrt{4\pi b}}{k^2+q^2}e^{-bq^2}$$

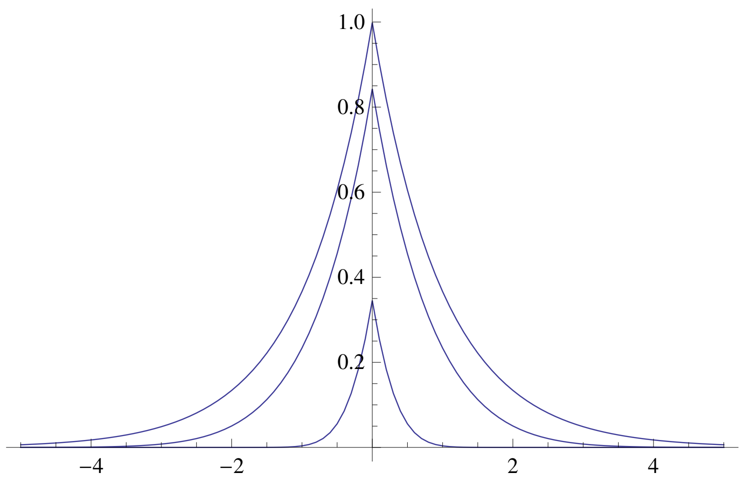

Figure 2: La fonction $c(x,t)$ calculée, pour $t = 0.1, 1, 5$ et $J = \alpha = D = 1$

6. Touche Finale. En utilisant les résultats précédents, donner la solution complète dans l'espace directe de la fonction $c(x,t)$.

Nous Voyons que nous pouvons écrire

$$\tilde{c}(q,t) = \frac{J}{Dq^2+\alpha} - e^{-\alpha t} e^{-Dtq^2} \frac{J}{Dq^2+\alpha} En$$

prenant la TF inverse, nous aboutissons à

$$\begin{aligned} c(x,t) &= \frac{J}{2\sqrt{D\alpha}} e^{-k|x|} \\ &- \frac{J}{2\sqrt{D\alpha}} \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k|y|} e^{-(y-x)^2/4Dt} dy \end{aligned}$$

dont le graphe est donné pour différent temps par la figure 2.

3 La formule de sommation de Poisson.

La formule de sommation de Poisson :

$$\sum_n f(nT) = \frac{1}{T} \sum_n \tilde{f}(\frac{2\pi n}{T}) \tag{9}$$

7. Etant donné la fonction connue $f(t)$, soit la fonction

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT)$$

Que vaut $\phi(0)$?

$$\phi(0) = \sum_n f(nT)$$

Comme

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t}$$

$\phi(0)$ evaut par ailleurs

$$\sum_k c_k$$

8. Démontrer que

$$c_k = \frac{1}{T}\tilde{f}\left(\frac{2\pi k}{T}\right)$$

Nous savons par définition que

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T \phi(t)e^{-2i\pi kt/T}dt$$

Si nous utilisons la définition de ϕ et que nous échangeons l'ordre d'intégration et de sommation

$$\begin{aligned}
c_k &= \tfrac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^T f(t+nT)e^{-2i\pi kt/T}dt \\
&= \tfrac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-2i\pi k(t-nT)/T}dt \\
&= \tfrac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-2i\pi kt/T}dt
\end{aligned}$$

Nous avons obtenu la dernière ligne en remarquant que $\exp(2i\pi nk) = 1$. Remarquons que la dernière ligne représente l'intégrale d'une fonction sur des intervalles se suivant, et nous pouvons donc l'écrire

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi kt/T}dt$$

Mais l'intégrale n'est rien d'autre que la TF pris au point $2\pi k/T$ et nous avons donc

$$c_k = \frac{1}{T}\tilde{f}\left(\frac{2\pi k}{T}\right)$$

9. En utilisant les deux résultats précédents, démontrer la formule (9).

10. Application. Nous savons que la TF $\left[1/(1+t^2)\right] = \exp(-|\omega|)$. Démontrer alors que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \pi \frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}$$

[Help : vous connaissez la somme de la série géométrique pour $\lambda < 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$$